Décompositions intégrales des familles spectrales et semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace hilbertien

Par CIPRIAN FOIAŞ à Bucarest

Le problème de décomposition des familles spectrales par l'intermédiaire des vecteurs qui ne sont plus dans l'espace hilbertien est assez récent. Ayant comme point de départ le travail de MAUTNER [17], inspiré de la „reduction-theory" de J. VON NEUMANN [19], ce problème s'était développé dans la théorie des équations aux dérivées partielles ([12], [3], [15]). Un autre point de départ est dû à GELFAND et KOSTUTCHENKO ([13], *voir* aussi [14]) qui ont lié cette décomposition d'un plongement continu de l'espace hilbertien dans un espace localement convexe de type spécial. Dans tous ces travaux (*voir* aussi [1], [2], [4], [16], [8]) le support de la famille spectrale est R^1 ou R^2, bien que les conditions imposées ne soient pas identiques. Mais en fait dans tous ces cas on transforme, par un changement de norme (qui s'avère nucléaire) la famille spectrale (qui n'est pas à variation bornée) en une mesure (à valeurs opérateurs ou formes linéaires) qui est à variation bornée (telles mesures viennent d'être étudiées par N. DINCULEANU [6], [7]). Le procédé de dérivation peut alors être remplacé par le théorème de Radon—Nikodym et par conséquent on n'est plus lié des supports R^1 ou R^2; c'est dans ce sens que nous utilisons l'idée initiale de GELFAND et KOSTUTCHENKO. D'autre part, le but principal des travaux antérieurs est la décomposition en fonctions propres (généralisées) des opérateurs différentiels ou aux dérivées partielles, tandis que le but de notre travail est l'étude de ces décompositions dans un cadre général (celui d'une famille spectrale ou semi-spectrale, définie sur un clan borélien quelconque), en liaison à la théorie spectrale dans les espaces hilbertiens.

Ainsi, après avoir donné la représentation intégrale des familles spectrales ou semi-spectrales en opérateurs „propres" qui sortent de l'espace hilbertien (§ 1, § 2) ou en vecteurs „propres" qui ne sont plus des éléments de l'espace hilbertien, on étudie les liaisons entre ces deux représentations (propositions 2.3, 3.1 et 4.2) et entre le rang des opérateurs de décomposition, la multiplicité et l'invariance unitaire de la famille spectrale (propositions 4.3 et 5.1). Ces propositions sont très voisines de certains résultats de la „reduction theory" de J. VON NEUMANN ([19] qui, dans ce cas particulier, en résultent) et du travail [1] de W. G. BADE et J. T. SCHWARZ.

La caractéristique de la méthode utilisée, c'est qu'elle permet d'éviter les champs de vecteurs, en utilisant seulement la notion plus simple de fonction à valeurs dans un espace de Banach. Le dernier paragraphe a pour but d'indiquer comment les résultats acquis peuvent être appliqués à l'étude spectrale, au calcul fonctionnel et au problème de l'invariance unitaire d'un opérateur autoadjoint borné.

Les principaux résultats contenus dans les premiers cinq paragraphes ont été énoncés déjà dans [9]. Des résultats du § 6, mentionnons l'étude des vecteurs propres approximatifs d'un opérateur autoadjoint borné (proposition 6.6) qui nous a été suggérée par M. SZ.-NAGY.

Une application naturelle des résultats de ce travail est la théorie spectrale dans les espaces nucléaires, dont les résultats ont été énoncés dans [10].

Je tiens à cette occasion d'exprimer ma gratitude à M. le professeur BÉLA SZ.-NAGY pour des utiles remarques.

1. Préliminaires sur la représentation intégrale des mesures vectorielles

Soient $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$ deux espaces linéaires normés de type dénombrable, soit $\mathfrak{F}^*$ l'espace conjugué de $\mathfrak{F}$, c'est-à-dire l'espace de Banach des formes f^* antilinéaires[1]) continues sur $\mathfrak{F}$, et soit $\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$ l'espace de Banach des opérateurs linéaires continus de $\mathfrak{E}$ à $\mathfrak{F}$. Soit $\mathfrak{B}$ un clan borélien des parties d'un ensemble T, soit $\mathbf{m}(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$ une mesure[2]) sur $\mathfrak{B}$ et soit

$$\nu=\sup\sum_i\|\mathbf{m}(\sigma_i)\|<\infty \tag{1.1}$$

où le supremum est pris pour toutes les familles finies $\{\sigma_i\}\subset\mathfrak{B}$ d'ensembles disjoints; l'hypothèse (1.1) veut dire que la mesure $\mathbf{m}(\sigma)$ est *à variation bornée.*

Envisageons la „variation totale indéfinie"

$$\nu(\sigma)=\sup\sum_i\|\mathbf{m}(\sigma_i)\|, \tag{1.2}$$

---

1) C'est-à-dire, vérifiant $\langle f^*|\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2\rangle=\bar\lambda_1\langle f^*|f_1\rangle+\bar\lambda_2\langle f^*|f_2\rangle$, où $f_1,f_2\in\mathfrak{F}$ et λ_1,λ_2 sont des nombres complexes.

2) C'est-à-dire, une fonction définie sur $\mathfrak{B}$, à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$, telle que $\mathbf{m}(\bigcup_n\sigma_n)=\sum_n\mathbf{m}(\sigma_n)$ pour toute suite $\{\sigma_n\}\subset\mathfrak{B}$ d'ensembles disjoints.

le supremum étant pris pour toutes les partitions finies $\{\sigma_i\} \subset \mathfrak{B}$ de σ $(\sigma \in \mathfrak{B})$. On vérifie sans peine que $\nu(\sigma)$ est une mesure positive bornée sur $\mathfrak{B}$, que toute fonction $\varphi(t) \in L^1_\nu$ est aussi intégrable par rapport à la mesure $\langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle$ $(e \in \mathfrak{E},\ f \in \mathfrak{F})$ et que

$$(1.3) \qquad \left|\int_T \varphi(t)d\langle \mathbf{m}(t)e|f\rangle\right| \leqq \|e\|\,\|f\| \int_T |\varphi(t)|\,d\nu(t).$$

Proposition 1.1.[3]) *Il existe une fonction $\chi_0(t)$ définie sur T à valeurs dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{F}^*)$, univoquement déterminée ν-pp,[4]) telle que*

$$(1.4) \qquad \langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi_0(t)e|f\rangle d\nu(t),$$

pour tout $e \in \mathfrak{E}$, $f \in \mathfrak{F}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. De plus $\|\chi_0(t)\| = 1$ ν-pp.

Démonstration. L'inégalité (1.3) nous montre d'abord que toute mesure numérique $\langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle$ est absolument continue par rapport à $\nu(\sigma)$. D'après le théorème de Radon—Nikodym il existe une fonction $\chi_{e,f}(t)$ ν-intégrable, déterminée ν-pp, telle que

$$(1.5) \qquad \langle \mathbf{m}(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \chi_{e,f}(t)d\nu(t) \qquad (\sigma \in \mathfrak{B}).$$

Soit $\omega_\varepsilon^+ = \{t : |\chi_{e,f}(t)| \geqq \|e\|\,\|f\| + \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$. Alors, en posant $\varphi(t) = \overline{\chi_{e,f}(t)}\varphi_{\omega_\varepsilon^+}(t)$[5]) dans (1.3) nous obtenons

$$(\|e\|\,\|f\| + \varepsilon) \int_{\omega_\varepsilon^+} |\chi_{e,f}(t)|\,d\nu(t) \leqq \int_{\omega_\varepsilon^+} |\chi_{e,f}(t)|^2 d\nu(t) \leqq \|e\|\,\|f\| \int_{\omega_\varepsilon^+} |\chi_{e,f}(t)|\,d\nu(t),$$

ce qui n'est possible que si $\nu(\omega_\varepsilon^+) = 0$. Il résulte que $|\chi_{e,f}(t)| \leqq \|e\| \cdot \|f\|$ ν-pp. En posant $\chi_{e,f}(t) = 0$ sur l'ensemble exceptionnel, nous pouvons donc supposer

$$(1.6) \qquad |\chi_{e,f}(t)| \leqq \|e\|\,\|f\| \qquad (e \in \mathfrak{E};\ f \in \mathfrak{F};\ t \in T).$$

Soient $\mathfrak{E}_0$ (resp. $\mathfrak{F}_0$) l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels complexes d'une partie dénombrable partout dense dans $\mathfrak{E}$ (resp. $\mathfrak{F}$) Pour $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ rationnels complexes, $e_1, e_2 \in \mathfrak{E}_0$ et $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}_0$, on a

$$(1.7) \quad \chi_{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2,\, \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2}(t) = \lambda_1\bar{\mu}_1\chi_{e_1, f_1}(t) + \lambda_1\bar{\mu}_2\chi_{e_1, f_2}(t) + \lambda_2\bar{\mu}_1\chi_{e_2, f_1}(t) + \lambda_2\bar{\mu}_2\chi_{e_2, f_2}(t)$$

quel que soit t en dehors d'un ensemble $N(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; e_1, e_2; f_1, f_2)$ de ν-

---

[3]) Dans le cas où $\mathfrak{F}^*$ est de type dénombrable, cette proposition a été obtenue antérieurement par N. Dinculeanu [7] comme conséquence d'un théorème général [5].

[4]) C'est-à-dire, presque partout par rapport à la mesure $\nu(\sigma)$.

[5]) Pour un ensemble $\omega \subset T$, φ_ω désigne la fonction caractéristique de ω.

mesure nulle. Soit $N = \bigcup N(\lambda_1, \lambda_2; \mu_1, \mu_2; e_1, e_2; f_1, f_2)$; la réunion étant dénombrable on a aussi $\nu(N) = 0$. Pour $t \notin N$ la relation (1.7) est toujours vraie. En vertu de (1.6), cette relation se prolonge par continuité sur tout $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{F}$. Par conséquent, pour tout $t \notin N$ il existe un opérateur $\chi_0(t) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{F}^*)$ tel que $\langle \chi_0(t) e | f \rangle = \chi_{e,f}(t)$, quels que soient $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$. En posant $\chi_0(t) = 0$ pour $t \in N$, $\chi_0(t)$ est définie sur tout T et en vertu de (1.5), $\chi_0(t)$ vérifie la relation (1.4) pour tous $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$. De (1.6) il résulte que $\|\chi_0(t)\| \leqq 1$ pour tout $t \in T$. En utilisant maintenant le fait que $\mathfrak{E}_0$ et $\mathfrak{F}_0$ sont denses dans $\mathfrak{E}$ et dans $\mathfrak{F}$, on déduit par continuité (en faisant usage du théorème de Lebesgue) que (1.4) reste vraie pour tous $e \in \mathfrak{E}$ et $f \in \mathfrak{F}$. Soit maintenant $\omega_\varepsilon^- = \{t : \|\chi_0(t)\| \leqq 1 - \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$. Comme $\|\chi_0(t)\| = \sup |\langle \chi_0(t) e | f \rangle|$, le supremum étant pris pour $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$, il résulte que $\|\chi_0(t)\|$ est ν-mesurable donc $\omega_\varepsilon^- \in \mathfrak{B}$. Soit $\{\sigma_i\} \subset \mathfrak{B}$ une partition finie de ω_ε^-. Nous avons alors

$$\sum_i \|\mathbf{m}(\sigma_i)\| \leqq \sum_i \int_{\sigma_i} \|\chi_0(t)\| d\nu(t) = \int_{\omega_\varepsilon^-} \|\chi_0(t)\| d\nu(t) \leqq (1-\varepsilon)\nu(\omega_\varepsilon^-);$$

d'après la définition (1.2) il résulte $\nu(\omega_\varepsilon^-) \leqq (1-\varepsilon)\nu(\omega_\varepsilon^-)$, ce qui entraîne $\nu(\omega_\varepsilon^-) = 0$. Donc $\|\chi_0(t)\| = 1$ ν-pp.

Soit maintenant $\chi_1(t)$ une autre fonction vérifiant (1.4). Comme les fonctions $\chi_{e,f}(t)$ sont univoquement déterminées ν-pp, on obtient que, en dehors d'un ensemble N_1 de ν-mesure nulle, $\langle \chi_0(t) e | f \rangle = \langle \chi_1(t) e | f \rangle$ pour tout $e \in \mathfrak{E}_0$ et $f \in \mathfrak{F}_0$. On déduit par continuité que $\chi_1(t) = \chi_0(t)$ pour tout $t \notin N_1$. La proposition 1.1 est ainsi entièrement démontrée.

Envisageons maintenant une mesure positive quelconque $\mu(\sigma)$ sur $\mathfrak{B}$, σ-finie[6]), telle que $\mathbf{m}(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$.[7])

En vertu de la définition (1,2), $\nu(\sigma)$ est aussi absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. D'après le théorème de Radon—Nikodym il existe une fonction $\nu(t)$, μ-intégrable, telle que

$$\nu(\sigma) = \int_\sigma \nu(t) d\mu(t) \qquad (\sigma \in \mathfrak{B}). \tag{1.8}$$

Posons $\chi(t) = \nu(t)\chi_0(t)$. De (1.4) et (1.8) on déduit

$$\langle \mathbf{m}(\sigma) e | f \rangle = \int_\sigma \langle \chi(t) e | f \rangle d\mu(t) \tag{1.9}$$

pour tout $e \in \mathfrak{E}$, $f \in \mathfrak{F}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. L'unicité μ-pp de la fonction $\chi(t)[\in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{F}^*)]$ résulte par la même voie que celle de $\chi_0(t)$. C'est sous cette forme généralisée que nous utiliserons la proposition 1.1 dans ce travail. Pour cela, il est

---

[6]) C'est-à-dire $T = \bigcup_n T_n$ où $\mu(T_n) < \infty$.

[7]) C'est-à-dire telle que $\mu(\sigma) = 0$ entraîne $\mathbf{m}(\sigma) = 0$.

utile de remarquer que $\|\chi(t)\|=\nu(t)\|\chi_0(t)\|=\nu(t)$ μ-pp et que par conséquent (1.8) devient

$$\nu(\sigma)=\int_\sigma \|\chi(t)\|d\mu(t) \qquad (\sigma\in\mathfrak{B}). \tag{1.10}$$

Considérons maintenant un cas particulier que nous utiliserons dans la suite. Soit $\mathbf{m}(\sigma)\in\mathfrak{E}^*$ une mesure à variation bornée absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. En remarquant que $\mathfrak{E}^*=\mathfrak{L}(\mathfrak{E};C^*)$, où C est le champ des nombres complexes, nous pouvons appliquer la proposition 1.1 (sous sa forme généralisée). Par conséquent, il existe une fonction $\chi(t)\in\mathfrak{E}^*$, univoquement déterminée μ-pp, telle que

$$\langle\mathbf{m}(\sigma)|e\rangle=\int_\sigma\langle\chi(t)|e\rangle d\mu(t) \tag{1.11}$$

pour tout $e\in\mathfrak{E}$ et $\sigma\in\mathfrak{B}$.

2. La décomposition intégrale des familles spectrales ou semi-spectrales par l'intermédiaire des plongements nucléaires

Soit H un espace hilbertien, soit $(e|f)$ son produit scalaire, $\|e\|=\sqrt{(e|e)}$ sa norme, et soit $E(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ une famille semi-spectrale dans H[8]) Soit p un plongement nucléaire de $\mathfrak{E}$ dans H, c'est-à-dire un opérateur de $\mathfrak{E}$ dans H, tel que pour tout $e\in\mathfrak{E}$ on ait

$$pe=\sum_n\overline{\langle e_n^*|e\rangle}h_n \tag{2.1}$$

ou $\{h_n\}\subset H$, $\{e_n^*\}\subset\mathfrak{E}^*$ et

$$u=\sum_n\|e_n^*\|_1\|h_n\|<\infty.\text{[9])} \tag{2.2}$$

Soit p^* l'adjoint de p.[10])

P r o p o s i t i o n 2.1. *Quel que soit $h\in H$ fixé, la fonction d'ensemble $p^*E(\sigma)h\in\mathfrak{E}^*$ est une mesure à variation bornée.*

P r o p o s i t i o n 2.2. *La fonction d'ensemble $p^*E(\sigma)p\in\mathfrak{L}(\mathfrak{E};\mathfrak{E}^*)$ est une mesure à variation bornée.*

---

8) C'est-à-dire une application de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{L}(H;H)$, telle que, pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$, $E(\sigma)$ est un opérateur symétrique, $O\leqq E(\sigma)\leqq I$, et $(E(\sigma)h|g)$ est une mesure (numérique) sur $\mathfrak{B}$ pour tout $h,g\in H$. Si de plus $E(\sigma_1\cap\sigma_2)=E(\sigma_1)E(\sigma_2)$, la famille est dite *spectrale*. ($\mathfrak{B}$ est, comme plus haut, un clan borélien de parties d'un ensemble T.)

9) Pour distinguer les normes en $\mathfrak{E}$ de celles en H, nous désignons les premières par $\|\cdot\|_1$.

10) C'est-à-dire l'opérateur de H dans $\mathfrak{E}^*$, défini par $\langle p^*h|e\rangle=(h|pe)$ pour tout $h\in H$, $e\in\mathfrak{E}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que si $\{\sigma_i\}\subset\mathfrak{B}$ est une famille finie d'ensembles disjoints et $\sigma=\bigcup_i\sigma_i$, alors pour tout $g,h\in H$ on a

$$(2.3)\qquad \Big(\sum_i|(E(\sigma_i)g|h)|\Big)^2\leqq(E(\sigma)g|g)(E(\sigma)h|h).$$

En effet, on a $|(E(\sigma_i)g|h)|\leqq\sqrt{(E(\sigma_i)g|g)}\sqrt{(E(\sigma_i)h|h)}$, inégalité de Schwarz attachée à la forme hermitienne $(E(\sigma_i)e|e)\geqq 0$; la relation (2.3) en résulte par l'inégalité de Cauchy $(\sum_i a_ib_i)^2\leqq\sum_i a_i^2\sum_i b_i^2$.

Montrons maintenant que $p^*E(\sigma)h\in\mathscr{E}^*$ est à variation bornée. Pour $e\in\mathscr{E}$ nous avons

$$(2.4)\qquad \langle p^*E(\sigma)h|e\rangle=(E(\sigma)h|pe)=\sum_n\langle e_n^*|e\rangle(E(\sigma)h|h_n),$$

d'où

$$\|p^*E(\sigma)h\|_1\leqq\sum_n\|e_n^*\|_1|(E(\sigma)h|h_n)|.$$

De cette relation et de (2.3) il résulte

$$(2.5)\qquad \sum_i\|p^*E(\sigma_i)h\|_1\leqq\sqrt{(E(\sigma)h|h)}\sum_n\|e_n^*\|_1\sqrt{(E(\sigma)h_n|h_n)}.$$

Mais on a $\|E(\sigma)\|\leqq 1$, donc en tenant compte de (2.2) nous obtenons

$$\sum_i\|p^*E(\sigma_i)h\|_1\leqq\|h\|\sum_i\|e_n^*\|_1\|h_n\|=\|h\|u<\infty.$$

De cette manière, $p^*E(\sigma)h\in\mathscr{E}^*$ est à variation bornée.

De ce résultat il s'ensuit aisément que, pour toute suite infinie $\{\sigma_n\}$ d'ensembles disjoints $\sigma_n\in\mathfrak{B}$, la série $\sum_n p^*E(\sigma_n)h$ converge (en $\mathscr{E}^*$). L'additivité dénombrable de $p^*E(\sigma)h\in\mathscr{E}^*$ en résulte vu que $\langle p^*E(\sigma)h|e\rangle=(E(\sigma)h|pe)$ est dénombrablement additive pour tout $e\in\mathscr{E}$; cela achève la démonstration de la proposition 2.1.

Quant à la proposition 2.2, remarquons d'abord que par (2.1) nous avons pour $e,f\in\mathscr{E}$

$$\langle p^*E(\sigma)pe|f\rangle=(E(\sigma)pe|pf)=\sum_n\sum_m\overline{\langle e_n^*|e\rangle}\langle e_m^*|f\rangle(E(\sigma)h_n|h_m),$$

d'où il s'ensuit que

$$\|p^*E(\sigma)p\|_1\leqq\sum_{n,m}\|e_n^*\|_1\|e_m^*\|_1|(E(\sigma)h_n|h_m)|.$$

En faisant de nouveau usage de (2.3) on obtient

$$(2.6)\qquad \sum_i\|p^*E(\sigma_i)p\|_1\leqq\sum_{n,m}\|e_n^*\|_1\|e_m^*\|_1\sqrt{(E(\sigma)h_n|h_n)}\sqrt{(E(\sigma)h_m|h_m)},$$

d'où, en tenant compte de (2.2) il résulte

$$\sum_i\|p^*E(\sigma_i)p\|_1\leqq\sum_{n,m}\|e_n^*\|_1\|e_m^*\|_1\|h_n\|\,\|h_m\|=u^2<\infty;$$

donc la fonction d'ensemble $p^*E(\sigma)p \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{E}^*)$ est à variation bornée. Son additivité dénombrable en résulte tout comme dans la démonstration de la proposition 2.1.

La démonstration des propositions 2.1 et 2.2 est ainsi achevée.

Soit $\nu(h; \sigma)$ la variation totale indéfinie de $p^*E(\sigma)h \in \mathfrak{E}^*$. De (2.5) on déduit

$$\nu(h;\sigma) \leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sum_n \|e_n^*\|_1 \sqrt{(E(\sigma)h_n|h_n)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sqrt{\sum_n \|e_n^*\|_1 \|h_n\|} \sqrt{\sum_n \|e_n^*\|_1 \frac{(E(\sigma)h_n|h_n)}{\|h_n\|}}.$$

On vérifie sans peine que

$$\lambda(\sigma) = \sum_n \|e_n^*\|_1 \frac{(E(\sigma)h_n|h_n)}{\|h_n\|} \tag{2.7}$$

est une mesure positive bornée sur $\mathfrak{B}$. Par conséquent nous avons obtenu l'inégalité suivante

$$\nu(h;\sigma) \leqq \sqrt{u} \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sqrt{\lambda(\sigma)}. \tag{2.8}$$

Soit $\nu(\sigma)$ la variation totale indéfinie de $p^*E(\sigma)p$. De (2.6) on obtient de manière analogue

$$\nu(\sigma) \leqq u \cdot \lambda(\sigma). \tag{2.9}$$

Les inégalités (2.8) et (2.9) nous montrent qu'il existe des mesures numériques positives $\mu(\sigma)$ [par exemple $\lambda(\sigma)$], σ-finies, telles que $\nu(h,\sigma)$ $(h \in H)$ et $\nu(\sigma)$ soient absolument continues par rapport à $\mu(\sigma)$. Soit $\mu(\sigma)$ l'une de ces mesures, qu'on suppose fixée dans tout ce paragraphe.

En vertu des résultats du paragraphe précédent on obtient donc les représentations intégrales

$$\begin{cases} \langle p^*E(\sigma)h|e\rangle = \int_\sigma \langle (\chi h)(t)|e\rangle d\mu(t) & (e \in \mathfrak{E}, h \in H) \\ \langle p^*E(\sigma)pe|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) & (e, f \in \mathfrak{E}), \end{cases} \tag{2.10}$$

quel que soit $\sigma \in \mathfrak{B}$. Etudions-les de plus près. Pour tout $h \in H$, les fonctions $(\chi h)(t)$ sont univoquement déterminées μ-pp. Le changement des valeurs de ces fonctions sur un ensemble de μ-mesure nulle n'altérant pas (2.10), nous pouvons supposer que

$$\langle \chi(t)e|e\rangle \geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } e \in \mathfrak{E}, \tag{2.11}$$

$$(\chi pe)(t) = \chi(t)e \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } e \in \mathfrak{E}. \tag{2.12}$$

En effet (2.12) résulte du fait que $\chi(t)e$ est aussi une fonction de décomposition de $p^* E(\sigma)pe$, donc (en vertu de l'unicité de cette fonction) $\chi(t)e = (\chi pe)(t)$ μ-pp. En changeant les valeurs de $(\chi pe)(t)$ sur l'ensemble exceptionnel on obtient (2. 12). Quant à (2. 11) remarquons que $\langle p^* E(\sigma)pe|e\rangle = (E(\sigma)pe|pe) \geqq 0$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{B}$ et $e \in \mathfrak{E}$. Il résulte que $\langle \chi(t)e|e\rangle \geqq 0$ pour tout $t \notin N(e)$, où $\mu[N(e)] = 0$. Soit $N = \bigcup_{e \in \mathfrak{E}_0} N(e)$. Alors $\mu(N) = 0$. Nous pouvons donc poser $\chi(t) = 0$ sur N. Alors $\langle \chi(t)e|e\rangle \geqq 0$ pour tout $e \in \mathfrak{E}_0$, quel que soit $t \in T$. Mais $\mathfrak{E}_0$ est dense dans $\mathfrak{E}$; par conséquent (2. 11) résulte par continuité. Une autre propriété évidente des $\chi(t)$ [conséquence immédiate de (2. 11)] est:

$$(2.13) \qquad \langle \chi(t)e|f\rangle = \overline{\langle \chi(t)f|e\rangle} \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \quad \textit{et} \quad e, f \in \mathfrak{E}.$$

Une propriété, moins évidente, des fonctions $(\chi h)(t)$ est formulée par le suivant

Lemme. *Soit $\{k_n\} \subset H$ une suite tendant vers 0 (dans H), telle que chaque mesure $(E(\sigma)k_n|k_n)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. Il existe alors une suite partielle $\{k_{n_p}\}$ telle que $\{(\chi k_{n_p})(t)\}$ tend vers 0 (dans $\mathfrak{E}^*$) μ-pp.*

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$|\langle p^* E(\sigma)h|e\rangle| = |(E(\sigma)h|pe)| \leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)}\sqrt{(E(\sigma)pe|pe)} \leqq$$
$$\leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)}\sqrt{\langle p^* E(\sigma)pe|e\rangle}$$

d'où, par un raisonnement déjà utilisé dans la démonstration des propositions ci-dessus, on obtient que la variation totale indéfinie de $\langle p^* E(\sigma)h|e\rangle$ est majorée par $\sqrt{(E(\sigma)h|h)}\sqrt{\langle p^* E(\sigma)pe|e\rangle}$; donc, en vertu de (2. 10), on a

$$(2.14) \qquad \int_\sigma |\langle (\chi h)(t)|e\rangle| d\mu(t) \leqq \sqrt{(E(\sigma)h|h)} \sqrt{\int_\sigma \langle \chi(t)e|e\rangle d\mu(t)}$$

quels que soient $e \in \mathfrak{E}$, $h \in H$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. Mais dans notre cas

$$(2.15) \qquad (E(\sigma)k_n|k_n) = \int_\sigma [k_n(t)]^2 d\mu(t) \quad \text{où} \quad k_n(t) \geqq 0,$$

pour tous $n = 1, 2, \ldots$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. (2. 14) devient

$$(2.16) \qquad \int_\sigma |\langle (\chi k_n)(t)|e\rangle| d\mu(t) \leqq \sqrt{\int_\sigma [k_n(t)]^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_\sigma \langle \chi(t)e|e\rangle d\mu(t)}.$$

Soit $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma) = \{t\colon |\langle (\chi k_n)(t)|e\rangle| \geqq \alpha,\ k_n(t) \leqq \beta,\ \sqrt{\langle \chi(t)e|e\rangle} \leqq \gamma\}$ où α, β, γ

sont des nombres rationnels, $\beta, \gamma \geqq 0$, $\beta\gamma < \alpha$. Alors

$$\alpha\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)] \leqq \int_{\sigma_n(\alpha,\beta,\gamma)} |\langle(\chi k_n)(t)|e\rangle| d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int_{\sigma_n(\alpha,\beta,\gamma)} |k_n(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_{\sigma_n(\alpha,\beta,\gamma)} \langle\chi(t)e|e\rangle d\mu(t)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\beta^2\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)]} \sqrt{\gamma^2\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)]} = \beta\gamma\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \sigma)],$$

ce qui n'est possible que si $\mu[\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)] = 0$. Comme l'ensemble $N_n(e)$ des points $t \in T$, en lesquels l'inégalité

$$|\langle(\chi k_n)(t)|e\rangle| \leqq k_n(t)\sqrt{\langle\chi(t)e|e\rangle} \tag{2.17}$$

n'est pas vraie, est une réunion dénombrable d'ensembles $\sigma_n(\alpha, \beta, \gamma)$, il résulte que $\mu[N_n(e)] = 0$. Soit $N_n = \bigcup_{e \in \mathfrak{E}_0} N_n(e)$. Alors $\mu(N_n) = 0$ et de (2. 17) on déduit

$$\|(\chi k_n)(t)\|_1 \leqq k_n(t)\sqrt{\|\chi(t)\|_1} \tag{2.18}$$

pour tout $t \notin N_n$. Donc, si $t \notin N = \bigcup_n N_n$, où $\mu(N) = 0$, l'inégalité (2. 18) est vraie pour tout $n = 1, 2, \ldots$. Soit $\{k_{n_p}\}$ une suite partielle de $\{k_n\}$, telle que $\sum_p \| k_{n_p}\|^2 < \infty$. Alors de (2. 15) il résulte

$$\sum_p \int_T [k_{n_p}(t)]^2 d\mu(t) = \sum_p \|k_{n_p}\|^2 < \infty.$$

En vertu du théorème de Beppo Levi, on a $\sum_p |k_{n_p}(t)| < \infty$ μ-pp. Par conséquent, en dehors d'un ensemble N' de μ-mesure nulle, $k_{n_p}(t) \to 0$ pour $p \to \infty$. De (2. 18) il résulte qu'en dehors de l'ensemble $N \cup N'$ de μ-mesure nulle on a $\|(\chi k_{n_p})(t)\|_1 \to 0$ pour $p \to \infty$, c. q. f. d.

Désignons par $\mathfrak{H}(\mathfrak{E})$ le sous-espace fermé de H, engendré par les éléments de la forme $E(\sigma)pe$ ($\sigma \in \mathfrak{B}$, $e \in \mathfrak{E}$). Soit $\varkappa$ la projection (orthogonale) de H sur $\mathfrak{H}(\mathfrak{E})$. Alors

$$\langle p^* E(\sigma)h|e\rangle = (E(\sigma)h|pe) = (\varkappa h|E(\sigma)pe) = (E(\sigma)\varkappa h|pe) = \langle p^* E(\sigma)\varkappa h|e\rangle$$

pour tout $h \in H$ et $e \in \mathfrak{E}$. Par conséquent, dans $\mathfrak{E}^*$ on a

$$p^* E(\sigma)h = p^* E(\sigma)\varkappa h \qquad (h \in H,\ \sigma \in \mathfrak{B}). \tag{2.19}$$

Il en résulte

$$(\chi h)(t) = (\chi\varkappa h)(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } h \in H. \tag{2.20}$$

Soit $\mathfrak{E}(t)$ l'adhérence de $\chi(t)\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{E}^*$.

Proposition 2.3. *Si $E(\sigma)$ est une famille spectrale, pour tout $h \in H$ on a $(\chi h)(t) \in \mathcal{E}(t)$ μ-pp.*

Démonstration. En vertu de (2.20) il suffit de considérer $h \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Considérons d'abord

$$h = \sum_i \lambda_i E(\sigma_i) p e_i \qquad (\{\sigma_i\} \subset \mathfrak{B}, \{e_i\} \subset \mathcal{E}). \tag{2.21}$$

Posons $h(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma_i}(t) e_i \in \mathcal{E}$. On vérifie alors sans peine [en utilisant (2.10)] l'égalité suivante

$$\langle p^* E(\sigma) h | e \rangle = \int_\sigma \langle \chi(t) h(t) | e \rangle \, d\mu(t) \qquad (e \in \mathcal{E}, \sigma \in \mathfrak{B}).$$

Il résulte que $(\chi h)(t) = \chi(t) h(t)$ μ-pp, donc dans ce cas $(\chi h)(t) \in \mathcal{E}(t)$ μ-pp. Soit $\{k_n\}$ une suite d'éléments de la forme (2.21) tendant vers $h \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$ arbitraire. En dehors d'un ensemble N de μ-mesure nulle nous avons

$$(\chi(h - k_n))(t) = (\chi h)(t) - (\chi k_n)(t) \text{ et } (\chi k_n)(t) \in \mathcal{E}(t) \text{ pour tout } n. \tag{2.22}$$

Nous pouvons appliquer à la suite $\{h - k_n\}$ le lemme précédent.[11]) Nous obtenons une suite partielle $\{k_{n_p}\}$ telle que $(\chi(h - k_{n_p}))(t) \to 0$ en dehors d'un ensemble N' de μ-mesure nulle. De (2.20) il résulte que $(\chi h)(t) \in \mathcal{E}(t)$ pour tout $t \notin N \cup N'$, c. q. f. d.

Soit $\mathcal{E}'$ un autre espace normé et soit p' un plongement nucléaire de $\mathcal{E}'$ dans H, tel que $\mathcal{H}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}(\mathcal{E}')$. Soient $\chi'(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}'; \mathcal{E}'^*)$ et $(\chi' h)(t) \in \mathcal{E}'^*$ $(h \in H)$ les fonctions données par les représentations intégrales

$$\langle p'^* E(\sigma) h | e' \rangle = \int_\sigma \langle (\chi' h)(t) | e' \rangle d\mu(t) \qquad (e' \in \mathcal{E}', \sigma \in \mathfrak{B}),$$

$$\langle p'^* E(\sigma) p' e' | f' \rangle = \int_\sigma \langle (\chi')(t) e' | f' \rangle d\mu(t) \qquad (e', f' \in \mathcal{E}', \sigma \in \mathfrak{B}).$$

Soit $\mathcal{E}'(t)$ l'adhérence de $\chi'(t)\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}'^*$.

Proposition 2.4. *Si $E(\sigma)$ est une famille spectrale, alors $\mathcal{E}(t)$ et $\mathcal{E}'(t)$ ont la même dimension μ-pp.*

Démonstration. Remarquons d'abord qu'en répétant les calculs faits dans la démonstration des propositions 2.1 et 2.2, on obtient aisément

---

11) En effet, $(E(\sigma)h|h)$ est absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$, quel que soit $h \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$. Pour montrer cela, remarquons que pour un h de la forme (2.21) nous avons [vu que $E(\sigma)$ est une famille spectrale]

$$(E(\sigma)h|h) = \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle p^* E(\sigma \cap \sigma_i \cap \sigma_j) p e_i | e_j \rangle.$$

Il résulte que $\mu(\sigma) = 0$ entraîne $(E(\sigma)h|h) = 0$ aussi. Comme les h de la forme (2.21) engendrent un ensemble dense dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$, $\mu(\sigma) = 0$ entraîne $(E(\sigma)h|h) = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$.

que $p^* E(\sigma)p' \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}'; \mathscr{E}^*)$ est une mesure à variation bornée, absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. Soit $\Phi(t) \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}'; \mathscr{E}^*)$ la fonction définie sur T, donnée (en vertu de la proposition 1.1) par la représentation intégrale

$$\langle p^* E(\sigma)p'e'|f\rangle = \int_\sigma \langle \Phi(t)e'|f\rangle d\mu(t), \tag{2.23}$$

où $e' \in \mathscr{E}'$, $f \in \mathscr{E}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. En comparant (2.23) à (2.10) on obtient que $\Phi(t)e' = (\chi p'e')(t)$ μ-pp. Soit $\mathscr{E}'_0 \subset \mathscr{E}'$ le correspondant de $\mathscr{E}_0 \subset \mathscr{E}$. On a alors

$$\Phi(t)e' = (\chi p'e')(t) \quad \text{pour tout} \quad e' \in \mathscr{E}'_0, \tag{2.24}$$

quel que soit $t \notin N'$, où $\mu(N') = 0$. En utilisant la proposition 2.3, on déduit que

$$\Phi(t)\mathscr{E}'_0 \subset \mathscr{E}(t) \quad \text{pour tout} \quad t \notin N'. \tag{2.25}$$

D'autre part $\mathscr{E}'_0$ étant dense dans $\mathscr{E}'$, les éléments de la forme $h' = \sum_j \lambda'_j E(\sigma_j)p'e'_j$ $(e'_j \in \mathscr{E}'_0)$ engendrent $\mathscr{H}(\mathscr{E}') = \mathscr{H}(\mathscr{E})$. Par conséquent, en appliquant le lemme antérieur, on obtient en vertu de (2.24) que pour tout $e \in \mathscr{E}$ il existe une suite $\{h_m\}$ [où $h_m = \sum_j \lambda'_{mj} E(\sigma_{mj})p'e'_{mj}$ $(e'_{mj} \in \mathscr{E}'_0)$], telle que

$$\sum_j \lambda'_{mj} \varphi_{\sigma_{mj}}(t)\, \Phi(t)e'_{mj} = \sum_j \lambda'_{mj} \varphi_{\sigma_{mj}}(t)(\chi p'e'_{mj})(t) =$$
$$= \Big(\chi\big(\sum_j \lambda'_{mj} E(\sigma_{mj})p'e'_{mj}\big)\Big)(t) \to (\chi pe)(t) \quad (\text{dans } \mathscr{E}^*),$$

quel que soit $t \notin N(e)$, où $N(e) \supset N'$ est de μ-mesure nulle. La relation (2.12) nous montre que pour $t \notin N(e)$

$$\chi(t)e = (\chi pe)(t) = \lim \sum_j \lambda'_{mj} \varphi_{\sigma_{mj}}(t)\, \Phi(t)\, e'_{mj} \in \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'_0}.$$

Soit $N = \bigcup_{e \in \mathscr{E}_0} N(e)$; on a $\mu(N) = 0$ et $\chi(t)\mathscr{E}_0 \subset \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'_0} = \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$ pour tout $t \notin N$, d'où $\mathscr{E}(t) \subset \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$ $(t \notin N \supset N')$. De ce résultat et de (2.25) on obtient que $\mathscr{E}(t) = \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$ μ-pp.

Soit $\Phi'(t) \in \mathfrak{L}(\mathscr{E}; \mathscr{E}'^*)$ la restriction à $\mathscr{E}$ de l'adjoint de $\Phi(t)$. La dimension de $\overline{\Phi'(t)\mathscr{E}}$ ne peut alors dépasser celle de $\overline{\Phi(t)\mathscr{E}'}$. D'autre part, de (2.23) il résulte

$$\langle p'^* E(\sigma)pe|f'\rangle = \overline{\langle p^* E(\sigma)p'f'|e\rangle} = \int_\sigma \overline{\langle \Phi(t)f'|e\rangle} d\mu(t) = \int_\sigma \langle \Phi'(t)e|f'\rangle d\mu(t),$$

quels que soient $e \in \mathscr{E}$, $f' \in \mathscr{E}'$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. D'après ce que nous avons déjà démontré, il résulte [en changeant $\mathscr{E}$ par $\mathscr{E}'$ et $\Phi(t)$ par $\Phi'(t)$] que $\mathscr{E}'(t) = \overline{\Phi'(t)\mathscr{E}}$ μ-pp. En tenant compte encore une fois de la première partie de la démonstration, nous obtenons

$$\dim \mathscr{E}'(t) = \dim \overline{\Phi'(t)\mathscr{E}} \leqq \dim \overline{\Phi(t)\mathscr{E}'} = \dim \mathscr{E}(t) \quad \mu\text{-pp};$$

d'où, en changeant $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}'$ on en déduit que $\dim \mathcal{E}(t) \leqq \dim \mathcal{E}'(t)$ μ-pp, ce qui achève la démonstration.

Un autre fait utile est formulé pár la

Proposition 2.5. *Soit $h^*(t) \in \mathcal{E}^*$ une fonction définie sur T, telle que pour tout $e \in \mathcal{E}$, $\langle h^*(t)|e\rangle$ est μ-mesurable et*

$$|\langle h^*(t)|e\rangle|^2 \leqq |\varphi(t)|^2 \langle \chi(t)e|e\rangle \tag{2.26}$$

où $\varphi \in L^2_\mu$. Alors, si $E(\sigma)$ est une famille spectrale, il existe un (et un seul) $h^* \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$, tel que $(\chi h^*)(t) = h^*(t)$ μ-pp.

Démonstration. Soit h donné par (2.21). Posons

$$h(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma_i}(t) e_i \qquad (t \in T) \tag{2.27}$$

et

$$(h) = \int_T \langle h^*(t)|h(t)\rangle d\mu(t).$$

On vérifie sans peine que $h \to (h)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel [dense dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$] de ces h. De plus, en utilisant (2.26) et (2.27) nous avons

$$|(h)| \leqq \int_T |\langle h^*(t)|h(t)\rangle| d\mu(t) \leqq \int_T |\varphi(t)| \sqrt{\langle \chi(t)h(t)|h(t)\rangle} d\mu(t) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\int_T \langle \chi(t)h(t)|h(t)\rangle d\mu(t)} =$$

$$= \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j \int_{\sigma_i \cap \sigma_j} \langle \chi(t) e_i | e_j \rangle d\mu(t)} =$$

$$= \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \sqrt{\sum_{i,j} \lambda_i \bar{\lambda}_j (E(\sigma_i \cap \sigma_j) pe_i | pe_j)} =$$

$$= \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\varphi(t)} \sqrt{(\sum_i \lambda_i E(\sigma_i) pe_i | \sum_j \lambda_j E(\sigma_j) pe_j)} = \|h\| \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)}.$$

Par conséquent, la forme linéaire (h) est continue dans $\mathcal{H}(\mathcal{E})$. Il existe un (et un seul) $h^* \in \mathcal{H}(\mathcal{E})$, tel que $(h^*|h) = (h)$ pour tout h de la forme (2.21). En particulier pour $h = E(\sigma)pe$ nous obtenons

$$\langle p^* E(\sigma) h^* | e \rangle = (E(\sigma) h^* | pe) = (h^* | E(\sigma) pe) = \int_T \langle h^*(t) | \varphi_\sigma(t) e \rangle d\mu(t) =$$

$$= \int_\sigma \langle h^*(t) | e \rangle d\mu(t),$$

quel que soit $e \in \mathcal{E}$ et $\sigma \in \mathcal{B}$. Il résulte $(\chi h^*)(t) = h^*(t)$ μ-pp, c. q. f. d.

De cette démonstration résulte aussi l'inégalité

$$\|h^*\| \leqq \sqrt{\int_T |\varphi(t)|^2 d\mu(t)} \tag{2.28}$$

que nous utiliserons dans la suite.

3. La décomposition intégrale des familles semi-spectrales dans des espaces hilbertiens de type dénombrable

Soit $\mathcal{H}$ un espace hilbertien de type dénombrable et soit $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ une famille semi-spectrale dans $\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ un sous-espace linéaire partout dense dans $\mathcal{H}$, muni d'une nouvelle norme $\|e\|_1$, non nécessairement hilbertienne, telle que le plongement identique p de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{H}$ soit nucléaire. Telle situation est toujours réalisable.[12])

Dans ce cas p^* est biunivoque. En effet si $p^* h = 0$ on a $(h|e) = 0$ pour tout $e \in \mathcal{E}$, donc $h = 0$. Comme de plus $\langle p^* h|e\rangle = (h|pe) = (h|e)$ pour $e \in \mathcal{E}$, $h \in H$, il est légitime d'identifier $p^* h$ avec h. Alors $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}^*$ et

$$(h|e) = \langle h|e\rangle \qquad (e \in \mathcal{E}, h \in \mathcal{H}), \tag{3.1}$$

la forme des paranthèses indiquant si h est considéré dans $\mathcal{H}$ ou dans $\mathcal{E}^*$.

La famille $E(\sigma)$ considérée dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ est une mesure à variation bornée, car en fait elle est $p^* E(\sigma) p$. Soit $\nu(\sigma)$ la variation totale indéfinie de $E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$. Alors *$\nu(\sigma)$ est équivalente*[13]) *à $E(\sigma)$, considérée dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$*. En effet, $\nu(\sigma) = 0$ entraîne que $E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ est nul, donc $(E(\sigma)e|f) = 0$ pour tout $e, f \in \mathcal{E}$. Mais $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{H}$, donc $E(\sigma) = 0$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$. Inversement, si $E(\sigma) = 0$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$, alors $\lambda(\sigma) = 0$ [*voir* (2.7) et (2.9)] donc aussi $\nu(\sigma) = 0$. Cette propriété nous montre que *la classe d'équivalence de la mesure $\nu(\sigma)$ ne dépend pas de $\mathcal{E}$, mais seulement de la famille semi-spectrale $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$.*

Soit maintenant $\mu(\sigma)$ une mesure positive, σ-finie, telle que la famille $E(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. En appliquant les résultats du paragraphe précédent, nous pouvons énoncer les propositions suivantes [*voir* la proposition 1.1 et les relations (2.10), (2.11) et (2.12)][14]):

---

12) Par exemple, soit $\{h_n\}$ une base orthogonale complète de $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{E}$ l'espace des combinaisons finies de $\{h_n\}$. Pour un $e = \sum_j \lambda_j h_j \in \mathcal{E}$ posons $\|e\|_1 = \sqrt{\sum_j j^4 |\lambda_j|^2}$. On vérifie sans peine que nos conditions sont remplies. Remarquons que cette nouvelle norme est elle-même hilbertienne.

13) C'est-à-dire $E(\sigma) = 0$ dans $\mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ si et seulement si $\nu(\sigma) = 0$.

14) Pour le cas où $T = R^1$ ou R^2, proposition 3.2 correspond aux décompositions en „vecteurs propres" de Gelfand et Kostutchenko ([13] et [14]) et de Browder [4]. Proposition 3.1 contient comme cas particulier (choix particulier de la norme $\|\cdot\|_1$, $T = R^1$) la décomposition en „opérateurs propres" de Katz [16], ou celle de l'auteur ($T = R^1$, *voir* [8]).

P r o p o s i t i o n 3. 1. *Il existe une fonction* $\chi(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$, *univoquement determinée* μ-pp, *telle que*

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \tag{3.2}$$

pour tout $e, f \in \mathcal{E}$ *et* $\sigma \in \mathfrak{B}$. *De plus*

$$\langle \chi(t)e|e\rangle \geqq 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in T, e \in \mathcal{E}, \tag{3.3}$$

et $\|\chi(t)\|_1$ *est* μ-*intégrable.*

P r o p o s i t i o n 3. 2. *Pour tout* $h \in \mathcal{H}$ *il existe une fonction* $(\chi h)(t) \in \mathcal{E}^*$ *définie sur* T, *univoquement déterminée* μ-pp, *telle que*

$$\langle E(\sigma)h|e\rangle = \int_\sigma \langle (\chi h)(t)|e\rangle d\mu(t) \tag{3.4}$$

pour tout $e \in \mathcal{E}$ *et* $\sigma \in \mathfrak{B}$. *De plus pour* $e \in \mathcal{E}$ *on a* $(\chi e)(t) = \chi(t)e$.

Dès ce moment nous supposerons toujours que les familles semi-spectrales ou spectrales $E(\sigma)$ *vérifient la condition* $E(T) = I$. La relation (3. 2) donne en particulier

$$\langle e|f\rangle = \int_T \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \tag{3.5}$$

pour tout $e, f \in \mathcal{E}$ [15]). On a la suivante réciproque de la proposition 3. 1:

P r o p o s i t i o n 3. 3. *Soit* $\chi(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ *une fonction définie sur* T, *vérifiant* (3. 3) *et* (3. 5). *Il existe une famille semi-spectrale* $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ *et une seule, pour laquelle* (3. 2) *soit vraie.*

D é m o n s t r a t i o n. L'unicité de la famille semi-spectrale $E(\sigma)$ $(\sigma \in \mathfrak{B})$ résulte directement de (3. 2) et du fait que $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{H}$. Il nous reste à démontrer que

$$(e|f)_\sigma = \int_\sigma \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E})$$

peut se représenter sous la forme $(E(\sigma)e|f)$, où $O \leqq E(\sigma) \leqq I$. En ce but, remarquons que $(e|f)_\sigma$ est linéaire en $e \in \mathcal{E}$, antilinéaire en $f \in \mathcal{E}$ et qu'en vertu de (3. 3) et de (3. 5) elle vérifie

$$0 \leqq (e|e)_\sigma \leqq (e|e) \qquad (e \in \mathcal{E}). \tag{3.6}$$

L'inégalité de Schwarz appliquée à $(e|f)_\sigma$ nous donne $|(e|f)_\sigma| \leqq \|e\|\,\|f\|$. Par conséquent, $(e|f)_\sigma$ peut se prolonger en une forme bilinéaire continue sur $\mathcal{H}$ qu'on peut représenter par $(E(\sigma)e|f)$ où $E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$. En vertu de (3. 6) on a $O \leqq E(\sigma) \leqq I$, c. q. f. d.

---

[15]) En fait (3. 5) est une décomposition intégrale faible de l'opérateur de plongement p^*p de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^*$, en opérateurs vérifiant (3. 3).

Posons maintenant $\sigma = T$ dans (3.4). Nous voyons que pour tout $h \in \mathcal{H}$ il existe des fonctions $h^*(t) \in \mathfrak{E}^*$ [par exemple $h^*(t) = (\chi h)(t)$], définies sur T, telles que

$$\langle h|e\rangle = \int_T \langle h^*(t)|e\rangle d\mu(t) \quad \textit{pour tout} \quad e \in \mathfrak{E}. \tag{3.7}$$

Il est naturel de se demander sous quelles conditions peut-on déduire de (3.7) que $h^*(t) = (\chi h)(t)$ μ-pp.

Une réponse à cette question est donnée par la

Proposition 3.4.[16]) *Si la fonction $h^*(t) = h(t)\chi(t)f$, où $h(t)$ est une fonction numérique μ-mesurable et $f \in \mathfrak{E}$, vérifie* (3.7) *et*

$$\|h\|^2 = \int_T |h(t)|^2 \langle \chi(t)f|f\rangle d\mu(t), \tag{3.8}$$

on a $(\chi h)(t) = h(t)\chi(t)f$ μ-pp.

Démonstration. Remarquons d'abord que de (3.8) il résulte $h(t)\sqrt{\langle \chi(t)f|f\rangle} \in L^2_\mu$ et que

$$|\langle h^*(t)|e\rangle|^2 \leqq |h(t)|^2 |\langle \chi(t)f|e\rangle|^2 \leqq |h(t)|^2 \langle \chi(t)f|f\rangle \langle \chi(t)e|e\rangle.$$

Considérons maintenant l'extension de NEUMARK $\mathbf{E}(\sigma)$ de $E(\sigma)$ ($\sigma \in \mathfrak{B}$), où $\mathbf{E}(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$, $\mathfrak{H} \supset \mathcal{H}$[17]). Alors [en vertu de la proposition 2.5 et de la remarque[17])] il existe un $h^* \in \mathfrak{H}$ tel que $(\chi h^*)(t) = h(t)\chi(t)f$ μ-pp. Pour $e \in \mathfrak{E}$ nous avons donc

$$(h^*|e) = \int_T h(t) \langle \chi(t)f|e\rangle d\mu(t) = (h|e),$$

ce qui montre que $Ph^* = h$ (P étant la projection orthogonale de $\mathfrak{H}$ sur $\mathcal{H}$). D'autre part de (2.28) il résulte

$$\|h^*\| \leqq \sqrt{\int_T |h(t)|^2 \langle \chi(t)f|f\rangle d\mu(t)} = \|h\| = \|Ph^*\|$$

ce qui n'est possible que si $h^* = h$. Par conséquent $(\chi h)(t) = (\chi h^*)(t) = h(t)\chi(t)f$ μ-pp, c. q. f. d.

---

[16]) Pour le cas $T = R^2$, celle-ci se trouve aussi dans [4].

[17]) C'est une famille *spectrale* dans $\mathfrak{H}$ telle que pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$ on ait $E(\sigma)h = P\mathbf{E}(\sigma)h$, où P est la projection (orthogonale) de $\mathfrak{H}$ sur $\mathcal{H}$; de plus $\mathfrak{H}$ est engendré par les éléments $\mathbf{E}(\sigma)h$ ($h \in \mathcal{H}$, $\sigma \in \mathfrak{B}$). La structure $\{\mathfrak{H}, E(\sigma), \mathcal{H}\}$ est déterminée à isomorphie près (*voir* [20] et [23]). On voit sans peine que $p^*\mathbf{E}(\sigma)p = E(\sigma) \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}; \mathfrak{E}^*)$, donc les opérateurs de décomposition de $p^*\mathbf{E}(\sigma)p$ et de $E(\sigma)$ sont les mêmes. Tous les résultats du § 2 s'appliquent par conséquent à $\mathbf{E}(\sigma)$. En particulier, les décompositions (2.10), la proposition 2.4 et la remarque [11]), où nous n'avons qu'à observer que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\mathfrak{E})$ par rapport à $\mathbf{E}(\sigma)$.

4. La représentation des opérateurs $\chi(t)$. Le cas des opérateurs de rang fini

Soit $\mathbf{E}(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{H};\mathfrak{H})$, $\mathfrak{H}\supset\mathcal{H}$, l'extension de NEUMARK de $E(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ [*voir* la remarque [17]]. Nous commençons nos considérations par une proposition préliminaire. Soit $\mathbf{e}\in\mathfrak{H}$ fixé, soit $\mathfrak{H}_e$ le sous-espace linéaire fermé de $\mathfrak{H}$, engendré par les éléments $\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ et soit P_e la projection (orthogonale) de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}_e$, qui commute évidemment avec $\mathbf{E}(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$. Soit $\mu(\sigma)$ une mesure positive, σ-finie, telle que $E(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$. On a alors la

Proposition 4.1. *Il existe une fonction $\mathbf{e}^*(t)\in\mathcal{E}^*$ définie sur T, univoquement déterminée μ-pp, telle que*

$$(4.1)\qquad (P_e\mathbf{E}(\sigma)e|f)=\int_\sigma\overline{\langle\mathbf{e}^*(t)|e\rangle}\langle\mathbf{e}^*(t)|f\rangle d\mu(t)$$

pour tout $e,f\in\mathcal{E}$ et $\sigma\in\mathfrak{B}$; de plus, $\|\mathbf{e}^*(t)\|_1$ est μ-intégrable et $\langle\mathbf{e}^*(t)|e\rangle$ est μ-mesurable, quel que soit $e\in\mathcal{E}$.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà remarqué [*voir* [17]], $\mathbf{E}(\sigma)$ est aussi absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$, et il en est alors de même pour $P_e\mathbf{E}(\sigma)$. Nous pouvons donc appliquer les résultats du § 2. On obtient une fonction $\chi_e(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ univoquement déterminée μ-pp, telle que

$$(4.2)\qquad (P_e\mathbf{E}(\sigma)e|f)=\langle p^*P_e\mathbf{E}(\sigma)pe|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_e(t)e|f\rangle d\mu(t)$$

pour tout $e,f\in\mathcal{E}$ et $\sigma\in\mathfrak{B}$. $\mathbf{E}(\sigma)$ étant absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$, il existe une fonction $\mathbf{e}(t)\geqq 0$ telle que $(\mathbf{E}(\sigma)e|e)=\int_\sigma[\mathbf{e}(t)]^2d\mu(t)$ pour tout $\sigma\in\mathfrak{B}$. A tout élément $e=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)\mathbf{e}$ faisons correspondre la fonction $\psi_e(t)=$ $=\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}(t)\mathbf{e}(t)$. Nous avons

$$(e|e')=(\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)\mathbf{e}|\sum_j\lambda_j'\mathbf{E}(\sigma_j')\mathbf{e})=\sum_{i,j}\lambda_i\bar{\lambda}_j'(\mathbf{E}(\sigma_i\cap\sigma_j')\mathbf{e}|\mathbf{e})=$$
$$=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j'\int_{\sigma_i\cap\sigma_j'}[\mathbf{e}(t)]^2d\mu(t)=\int_T[\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}(t)\mathbf{e}(t)]\overline{[\sum_j\lambda_j'\varphi_{\sigma_j'}(t)\mathbf{e}(t)]}d\mu(t)=$$
$$=\int_T\psi_e(t)\overline{\psi_{e'}(t)}d\mu(t).$$

De cette manière, $e\rightarrow\psi_e(t)$ est une application linéaire isométrique d'un ensemble linéaire dense dans $\mathfrak{H}_e$ à valeurs dans L^2_μ. Cette application se prolonge en une application linéaire et isométrique de $\mathfrak{H}_e$ dans L^2_μ. Pour

$e = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(\sigma_i)\mathbf{e}$ nous avons

$$\mathbf{E}(\sigma)e = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(\sigma \cap \sigma_i)\mathbf{e} \longleftrightarrow \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma\cap\sigma_i}(t)\mathbf{e}(t) = \varphi_\sigma(t)\psi_e(t),$$

relation qui reste vraie pour tout $e \in \mathcal{H}_\mathbf{e}$; par conséquent

$$\int_\sigma \langle \chi_\mathbf{e}(t)e|f\rangle d\mu(t) = (P_\mathbf{e}\mathbf{E}(\sigma)e|f) = (\mathbf{E}(\sigma)P_\mathbf{e}e|P_\mathbf{e}f) =$$

$$= \int_T \varphi_{\mathbf{E}(\sigma)P_\mathbf{e}e}(t)\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}\,d\mu(t) = \int_\sigma \psi_{P_\mathbf{e}e}(t)\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}\,d\mu(t)$$

pour tout $e, f \in \mathcal{E}$; $\sigma \in \mathfrak{B}$. Il résulte qu'en dehors d'un ensemble $N(e,f)$ de μ-mesure nulle on a

$$\langle \chi_\mathbf{e}(t)e|f\rangle = \psi_{P_\mathbf{e}e}(t)\,\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}. \tag{4.3}$$

Soit $N = \bigcup_{e,f\in\mathcal{E}_0} N(e,f)$; N est aussi de μ-mesure nulle. (4.3) est vérifiée pour tout $e, f \in \mathcal{E}_0$ et $t \notin N$. Pour tel t nous avons

$$|\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)|^2 \leqq \langle \chi_\mathbf{e}(t)e|e\rangle \leqq \|\chi_\mathbf{e}(t)\|_1 \|e\|_1^2$$

pour tout $e \in \mathcal{E}$, ce qui montre que l'application $e \to \overline{\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)}$ de $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$ dans C est continue. Cette application se prolonge univoquement en une forme $\mathbf{e}^*(t)$ antilinéaire continue sur $\mathcal{E}$. En posant $\mathbf{e}^*(t) = 0$ sur N, nous avons $\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle = \overline{\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)}$ $(e \in \mathcal{E})$ et $\|\mathbf{e}^*(t)\|_1^2 = \|\chi_\mathbf{e}(t)\|_1$ μ-pp. On en déduit que $\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle$ $(e \in \mathcal{E})$ et $\|\mathbf{e}^*(t)\|_1$ appartiennent à L^2_μ. Pour $t \notin N$ il résulte de (4.3) la relation

$$\chi_\mathbf{e}(t)e = \overline{\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle}\mathbf{e}^*(t) \qquad (e \in \mathcal{E}). \tag{4.4}$$

De cette relation et de (4.2) on obtient (4.1), c. q. f. d.

En ce qui concerne les éléments $\mathbf{e}^*(t)$ remarquons que

$$\mathbf{e}^*(t) \in \mathcal{E}(t) \quad \mu\text{-pp} \tag{4.5}$$

où, comme dans le § 2, $\mathcal{E}(t)$ est l'adhérence dans $\mathcal{E}^*$ de $\chi(t)\mathcal{E}$. En effet, soit $Z_\mathbf{e} = \{t: \mathbf{e}(t) = 0\}$; alors pour tout $h \in \mathcal{H}_\mathbf{e}$ nous avons $\psi_h(t) = 0$ sur $Z_\mathbf{e} - Z_\mathbf{e}(h)$ où $\mu[Z_\mathbf{e}(h)] = 0$. Soit $Z'_\mathbf{e} = \bigcup_{e\in\mathcal{E}_0} Z_\mathbf{e}(P_\mathbf{e}e)$. Alors $\mu(Z'_\mathbf{e}) = 0$ et $\langle \mathbf{e}^*(t)|e\rangle = \overline{\psi_{P_\mathbf{e}e}(t)} = 0$ pour tout $e \in \mathcal{E}_0$ et $t \in Z_\mathbf{e} - Z'_\mathbf{e}$. Il résulte que $\mathbf{e}^*(t) = 0$ sur $Z_\mathbf{e} - Z'_\mathbf{e}$. D'autre part, pour $f \in \mathcal{E}$ nous avons

$$\langle p^*\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}|f\rangle = (\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}|f) = (P_\mathbf{e}\mathbf{E}(\sigma)\mathbf{e}|f) = \int_\sigma \psi_\mathbf{e}(t)\,\overline{\psi_{P_\mathbf{e}f}(t)}\,d\mu(t) =$$

$$= \int_\sigma \mathbf{e}(t)\langle \mathbf{e}^*(t)|f\rangle d\mu(t) \qquad (\sigma \in \mathfrak{B}).$$

Il en résulte que $(\chi\mathbf{e})(t) = \mathbf{e}(t)\mathbf{e}^*(t)$ en dehors d'un ensemble N' de μ-mesure nulle. (4.5) est évidemment vérifié si $\mathbf{e}^*(t) = 0$. Dans le cas contraire soit $t \notin N' \cup Z'_e$. Alors $\mathbf{e}(t) \neq 0$, d'où en utilisant la proposition 2. 3 on déduit

$$\mathbf{e}^*(t) = \frac{(\chi\mathbf{e})(t)}{\mathbf{e}(t)} \in \mathcal{E}(t) \qquad \mu\text{-pp.}$$

Comme $\mu(N' \cup Z'_e) = 0$, la relation (4. 5) est complètement démontrée.

Passons maintenant à l'étude des opérateurs $\chi(t)$. Soit $\{\mathbf{e}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un système d'éléments $\neq 0$ de $\mathcal{H}$, tel que le système $\{P_{\mathbf{e}_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ soit formé de projections orthogonales entre elles, et maximum sous cette propriété. Soit $\{k_n\} \subset \mathcal{H}$ une base dénombrable dans $\mathcal{H}$. L'ensemble $A_n = \{\alpha: P_{\mathbf{e}_\alpha} k_n \neq 0\}$ est au plus dénombrable. Soit $A_0 = \bigcup\limits_n A_n$ et $\alpha \in A - A_0$. Alors $P_{\mathbf{e}_\alpha} k_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$, donc aussi $P_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{E}(\sigma)h = \mathbf{E}(\sigma)P_{\mathbf{e}_\alpha}h = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $\sigma \in \mathcal{B}$. Comme les éléments $\mathbf{E}(\sigma)h$ ($h \in \mathcal{H}$, $\sigma \in \mathcal{B}$) engendrent $\mathcal{H}$, il résulte que $P_{\mathbf{e}_\alpha} = 0$, donc $\mathbf{e}_\alpha = 0$, en contradiction avec l'hypothèse $\mathbf{e}_\alpha \neq 0$ pour tout $\alpha \in A$. Par conséquent $A = A_0$ est dénombrable; nous pouvons choisir $A = N$ l'ensemble des nombres entiers positifs. D'autre part, en utilisant les relations (1. 10), (2. 9) et (2. 7) (dans cet ordre) pour chaque $P_{\mathbf{e}_n}\mathbf{E}(\sigma)$ ($\sigma \in \mathcal{B}$) et $\chi_{\mathbf{e}_n}(t)$ ($t \in T$), nous obtenons les relations

$$\sum_n \int_T \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1^2 d\mu(t) = \sum_n \int_T \|\chi_{\mathbf{e}_n}(t)\|_1 d\mu(t) \leqq \sum_n u \sum_m \|e_m^*\|_1 \frac{(P_{\mathbf{e}_n} h_m | h_m)}{\|h_m\|} =$$

$$= u \sum_n \sum_m \|e_m^*\|_1 \|h_m\| \left\| P_{\mathbf{e}_n} \frac{h_m}{\|h_m\|} \right\|^2 = u \sum_m (\|e_m^*\|_1 \|h_m\|).$$

$$\left(\sum_n \left\| P_{\mathbf{e}_n} \frac{h_m}{\|h_m\|} \right\|^2 \right) = u \sum_m \|e_m^*\|_1 \|h_m\| = u^2,$$

ce qui nous montre (en vertu du théorème de Beppo Levi) que $\sum\limits_n \|\mathbf{e}^*(t)\|_1^2$ *est μ-intégrable,* et que

(4. 6) $$\int_T \Big[\sum_n \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1^2\Big] d\mu(t) \leqq u^2.$$

De cette manière, $\sum\limits_n \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1^2 < \infty$ en dehors d'un ensemble de μ-mesure nulle. En utilisant ce fait et (4. 5) nous avons [en posant $\mathbf{e}_n^*(t) = 0$ sur un ensemble de μ-mesure nulle]

(4. 7) $$\sum_n \|\mathbf{e}_n^*\|_1^2 < \infty \quad \textit{pour tout} \quad t \in T,$$

(4 8) $$\mathbf{e}_n^*(t) \in \mathcal{E}(t) \quad \textit{pour tout} \quad t \in T \textit{ et } n = 1, 2, \ldots.$$

Soit $\chi_1(t)$ l'opérateur défini par l'application $e \to \sum\limits_n \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t) | e \rangle} \mathbf{e}_n^*(t)$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}^*$. En vertu de (4. 7) on a $\chi_1(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$. D'autre part, en vertu de la proposition 4. 1, nous avons pour tout $e, f \in \mathfrak{E}$

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle = (E(\sigma)e|f) = (\mathbf{E}(\sigma)e|f) = \sum_n (P_{\mathbf{e}_n}\mathbf{E}(\sigma)e|f) =$$
$$= \sum_n \int_\sigma \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle}\langle \mathbf{e}_n^*(t)|f\rangle d\mu(t) =$$
$$= \int_\sigma [\sum_n \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle}\langle \mathbf{e}_n^*(t)|f\rangle] d\mu(t) = \int_\sigma \langle \chi_1(t)e|f\rangle d\mu(t),$$

quel que soit $\sigma \in \mathfrak{B}$. D'après la proposition 3. 1, $\chi(t) = \chi_1(t)$ μ-pp. On peut donc supposer que

$$\chi(t)e = \sum_n \overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle}\mathbf{e}_n^*(t) \qquad (e \in \mathfrak{E}), \tag{4. 9}$$

quel que soit $t \in T$.

On peut aussi supposer que, *pour tout* n, $\mathbf{e}_n^*(t)$ *est ou bien linéairement indépendant de* $\mathbf{e}_1^*(t), \mathbf{e}_2^*(t), \ldots, \mathbf{e}_{n-1}^*(t)$, *ou bien* $\mathbf{e}_n^*(t) = 0$, *quel que soit* $t \in T$. Il suffit de démontrer que pour tout n cette alternative est vraie en dehors d'un ensemble N_n de μ-mesure nulle, car nous pouvons toujours poser $\mathbf{e}_l^*(t) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots)$ sur l'ensemble $\bigcup_n N_n$ de μ-mesure nulle. Soit maintenant $\{k_m\}$ une suite convergeant vers $\mathbf{e}_n$, $k_m = \sum_i \lambda_{mi}\mathbf{E}(\sigma_{mi})e_{mi}$ $(e_{mi} \in \mathfrak{E})$. En appliquant successivement le lemme du § 2, on trouve une suite partielle $\{k_{m_p}\}$ telle que la suite $\{(\chi_{\mathbf{e}_l}k_{m_p})(t)\}$ converge dans $\mathfrak{E}^*$ vers $(\chi_{\mathbf{e}_l}\mathbf{e}_n)(t)$ en dehors d'un ensemble N_n' de μ-mesure nulle, quel que soit $l = 1, 2, \ldots, n$. Soit $k_{m_p}(t) = \sum_i \lambda_{m_p i}\varphi_{\sigma_{m_p i}}(t)e_{m_p i}$, alors (*voir* aussi la démonstration de la proposition 2. 3) nous avons en dehors d'un autre ensemble N_n'' de μ-mesure nulle

$$(\chi_{\mathbf{e}_l}k_{m_p})(t) = \chi_{\mathbf{e}_l}(t)k_{m_p}(t) = \overline{\langle \mathbf{e}_l^*(t)|k_{m_p}(t)\rangle}\mathbf{e}_l^*(t) \quad (l = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots).$$

Mais $(\chi_{\mathbf{e}_l}\mathbf{e}_n)(t) = 0$ pour $l < n$ et $(\chi_{\mathbf{e}_n}\mathbf{e}_n)(t) = \mathbf{e}_n(t)\mathbf{e}_n^*(t)$, donc pour $p \to \infty$

$$\overline{\langle \mathbf{e}_n^*(t)|h_{m_p}(t)\rangle} \to \mathbf{e}_n(t), \quad \overline{\langle \mathbf{e}_l^*(t)|h_{m_p}(t)\rangle} \to 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{4. 10}$$

pour tout $t \in N_n' \cup N_n''$. Soit L l'ensemble des t en lesquels $\mathbf{e}_n^*(t)$ dépend linéairement de $\mathbf{e}_1^*(t), \ldots, \mathbf{e}_{n-1}^*(t)$; soit $t \in L - N_n' \cup N_n'' \cup Z_{\mathbf{e}_n}'$. De $\mathbf{e}_n^*(t) = \sum_{l=1}^{n-1}\lambda_l\mathbf{e}_l^*(t)$ et de (4. 10) il résulte que $\mathbf{e}_n(t) = 0$, donc aussi $\mathbf{e}_n^*(t) = 0$. L'ensemble exceptionnel N_n est donc compris dans $N_n' \cup N_n'' \cup Z_{\mathbf{e}_n}'$ qui est évidemment de μ-mesure nulle, c. q. f. d.

Les relations (4. 9) et (4. 7) montrent que les *opérateurs* $\chi(t)$ *sont nucléaires*. Parmi ces opérateurs les plus simples sont les opérateurs de rang fini.[18]) Soit Ω_n l'ensemble des points $t \in T$ tels que $\chi(t)$ soit de rang fini n

[18]) Un opérateur est de rang fini si l'espace de ses valeurs est de dimension finie.

[c'est-à-dire que $\mathscr{E}(t)$ soit de dimension n], $n=0,1,2,\ldots$. De la dernière propriété que nous avons démontrée, il résulte que *pour tout* $t\in\Omega_n$ *il existe exactement* n *éléments* $\mathbf{e}_l^*(t)\neq 0$.

Posons, par définition,

$$(4.11)\qquad e_p^*(t)=\begin{cases}\text{le } p\text{-ième des } \mathbf{e}_l^*(t)\neq 0, \text{ si tel existe,}\\ 0 \text{ dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Les relations (4.7), (4.8) et (4.9) se conservent si on remplace $\mathbf{e}_l^*(t)$ par $e_l^*(t)$ $(l=1,2,\ldots)$. Montrons que $\langle e_p^*(t)|e\rangle$ *est* μ*-mesurable pour tout* $e\in\mathscr{E}$ *et* $p=1,2,\ldots$. Pour cela, remarquons d'abord que $\omega_n=\{t\colon \|\mathbf{e}_n^*(t)\|_1\neq 0\}$ est μ-mesurable. Posons $\omega_n^+=\omega_n$ et $\omega_n^-=T-\omega_n$. Soit $n_1<n_2<\cdots<n_p$ un système de nombres entiers positifs et soit $\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)=\bigcap_{l=1}^{n_p}\omega_l^{\pm}$, où le signe „+" est posé seulement pour $n_1,n_2,\ldots,n_p$. Evidemment, $\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)$ est μ-mesurable et

$$e_p^*(t)=\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_p}\varphi_{\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)}(t)\,\mathbf{e}_{n_p}^*(t)\qquad (t\in T);$$

notre assertion résulte maintenant du fait que

$$\sum_{n_1<n_2<\cdots<n_p}\varphi_{\omega(n_1,n_2,\ldots,n_p)}(t)\langle\mathbf{e}_{n_p}^*(t)|e\rangle$$

est μ-mesurable pour tout $p=1,2,\ldots$, c. q. f. d.

En résumant, nous avons démontré la

Proposition 4.2. *Il existe une suite* $\{e_n^*(t)\}\subset\mathscr{E}^*$ *de fonctions définies sur* T, *telle que* (i) $e_n^*(t)\in\mathscr{E}(t)$ *pour tout* $t\in T$ *et* n; (ii) $\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2\in L_\mu^1$ *et* $\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2<\infty$ *pour tout* $t\in T$; (iii) *si* $t\in\Omega_k$ *on a* $e_n^*(t)=0$ *pour tout* $n>k$ $(k=0,1,2,\ldots)$; (iv) $\langle e_n^*(t)|e\rangle\in L_\mu^2$ *pour tout* $e\in\mathscr{E}$ *et* n; (v) *dans* $\mathscr{E}^*$ *on a*

$$\chi(t)e=\sum_n\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}e_n^*(t),$$

pour tout $t\in T$ *et* $e\in\mathscr{E}$.

Dans le cas où Ω_n est vide pour $n\geqq 2$, nous obtenons le corollaire suivant:

Si les opérateurs $\chi(t)\neq 0$ *sont de rang* 1, *il existe une fonction* $e^*(t)\in\mathscr{E}^*$, *définie sur* T, *telle que* $\|e^*(t)\|_1\in L_\mu^2$, $\langle e^*(t)|e\rangle\in L_\mu^2$ *et* $\chi(t)e=\overline{\langle e^*(t)|e\rangle}e^*(t)$, *quel que soit* $e\in\mathscr{E}$.

Complétons la proposition 4.2 par une propriété d'indépendance linéaire des $e_n^*(t)$ $(n=1,2,\ldots)$. Soit $\Omega_\infty=T-\bigcup_{n=0}^{\infty}\Omega_n$ et soit $\{h_n(t)\}$ une suite de fonctions μ-mesurables telles que $\sum_n|h_n(t)|^2\in L_\mu^1$.

Proposition 4.3. *Dans* Ω_∞, $\sum_n h_n(t)e_n^*(t)=0$ μ-pp *entraîne* $h_n(t)=0$ μ-pp $(n=1,2,\ldots)$.

Démonstration. Soit $h'_n(t)=\varphi_{\Omega_\infty}(t)h_n(t)$. Remarquons que si $t\in\Omega_\infty$ nous avons $e_n^*(t)=\mathbf{e}_n^*(t)$ pour tout $n=1,2,\ldots$. Posons $h_n^*(t)=h'_n(t)\mathbf{e}_n^*(t)$. Alors

$$|\langle h_n^*(t)|e\rangle|^2=|h'_n(t)|^2|\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle|^2\leqq|h_n(t)|^2|\langle \mathbf{e}_n^*(t)|e\rangle|^2=|h_n(t)|^2\langle\chi_{\mathbf{e}_n}(t)e|e\rangle.$$

En vertu de la proposition 2.5 et de la proposition 4.1, il existe un $h_n\in\mathcal{H}_{\mathbf{e}_n}$, tel que $(\chi_{\mathbf{e}_n}h_n)(t)=h'_n(t)\mathbf{e}_n^*(t)$. La relation (2.28) nous donne

$$\|h_n\|^2\leqq\int_T|h_n(t)|^2d\mu(t).$$

Les projections $P_{\mathbf{e}_n}$ étant orthogonales entre eux nous avons

$$\Big\|\sum_{j=n}^{n+p}h_j\Big\|^2=\sum_{j=n}^{n+p}\|h_j\|^2\leqq\sum_{j=n}^{n+p}\int_T|h_n(t)|^2d\mu(t),$$

et comme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_T|h_n(t)|^2d\mu(t)=\int_T\Big[\sum_{n=1}^{\infty}|h_n(t)|^2\Big]d\mu(t)<\infty,$$

il résulte que la série $\sum_n h_n$ converge dans $\mathcal{H}$. Soit $h^*=\sum_n h_n$. Alors $(\chi h)(t)=\sum_n h'_n(t)e_n^*(t)=0$ μ-pp, ce qui entraîne $h=0$. Mais ceci entraîne à son tour que $h_n=0$ quel que soit $n=1,2,\ldots$; par conséquent $h'_n(t)e_n^*(t)=0$ μ-pp. Comme pour $t\in\Omega_\infty$ on a $e_n^*(t)\neq0$ $(n=1,2,\ldots)$, il résulte que dans Ω_∞ on a $h_n(t)=0$ μ-pp, c. q. f. d.

Un premier problème qui se pose est de déterminer le cas où $T=\bigcup_{k=0}^{n'}\Omega_k$. La réponse à cette question est contenue dans la

Proposition 4.4. *Les opérateurs* $\chi(t)$ *sont de rang* $\leqq n$ *si et seulement si* $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ *est de multiplicité* $\leqq n$.[19])

Démonstration. Supposons d'abord que $\mathbf{E}(\sigma)$ est de multiplicité n au plus. Soient $e_1,e_2,\ldots,e_n$ les éléments correspondants [*voir* la remarque[19])]. Posons $\mathbf{e}_1=e_1$, $\mathbf{e}_2=e_2-P_{\mathbf{e}_1}e_2,\ldots$, $\mathbf{e}_k=e_k-(P_{\mathbf{e}_1}+P_{\mathbf{e}_2}+\cdots+P_{\mathbf{e}_{k-1}})e_k,\ldots$ $\ldots$, $\mathbf{e}_n=e_n-(P_{\mathbf{e}_1}+P_{\mathbf{e}_2}+\cdots+P_{\mathbf{e}_{n-1}})e_n$. Alors $\{P_{\mathbf{e}_k}\}_{k=1}^n$ est un système maximum de projections orthogonales entre elles (*voir* les considérations faites après

---

[19]) La famille spectrale $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ est de multiplicité n s'il existe n éléments $e_1,e_2,\ldots,e_n$, tels que les éléments $\mathbf{E}(\sigma)e_k$ $(k=1,2,\ldots,n;\ \sigma\in\mathfrak{B})$ engendrent $\mathcal{H}$, et si aucun système de moins de n éléments de $\mathcal{H}$ n'a cette propriété.

la proposition 4.1); de cette manière dans (4.9) $\mathbf{e}^*_{n+1}(t)=\mathbf{e}^*_{n+2}(t)=\cdots=0$ pour tout $t\in T$, ce qui montre que les $\chi(t)$ sont de rang n au plus.

Supposons maintenant que les $\chi(t)$ sont de rang n au plus. Alors, en vertu de la proposition 4.2, nous avons

$$\chi(t)e=\sum_{k=1}^{n}\overline{\langle e_k^*(t)\,|\,e\rangle}e_k^*(t),$$

où $\langle e_k^*(t)|e\rangle\in L^2_\mu$ pour tout $e\in\mathfrak{E}$ et $k=1,2,3,\dots,n$. Soit $\mathfrak{L}$ le sous-espace linéaire fermé de $\sum_1^n\oplus L^2_\mu$, engendré par les systèmes de la forme $\varphi_\sigma\Psi_e=$ $=\{\varphi_\sigma(t)\overline{\langle e_1^*(t)|e\rangle},\ \varphi_\sigma(t)\overline{\langle e_2^*(t)|e\rangle},\dots,\varphi_\sigma(t)\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}\}$ où $\sigma\in\mathfrak{B}$ et $e\in\mathfrak{E}$. Comme

$$\begin{aligned}(\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i|\sum_j\lambda_j'\mathbf{E}(\sigma_j')e_j')&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j'(\mathbf{E}(\sigma_i\cap\sigma_j')e_i|e_j')=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j'\int_{\sigma_i\cap\sigma_j'}\langle\chi(t)e_i|e_j'\rangle d\mu(t)=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j'\int_T\varphi_{\sigma_i\cap\sigma_j'}(t)(\sum_k\overline{\langle e_k^*(t)|e_i\rangle}\langle e_k^*(t)|e_j'\rangle)d\mu(t)=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j'\Big[\sum_k\int_T\varphi_{\sigma_i}(t)\overline{\langle e_k^*(t)|e_i\rangle}\,\overline{\varphi_{\sigma_j'}(t)\overline{\langle e_k^*(t)|e_j'\rangle}}\,d\mu(t)\Big]=\\&=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j'(\varphi_{\sigma_i}\Psi_{e_i}|\varphi_{\sigma_j'}\Psi_{e_j'})=(\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}\Psi_{e_i}|\sum_j\lambda_j'\varphi_{\sigma_j'}\Psi_{e_j'})\qquad(e_i,e_j'\in\mathfrak{E})\end{aligned}$$

(où les derniers deux produits scalaires sont dans $\sum_1^n\oplus L^2_\mu$), il résulte que

$$h=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i\to\Psi_h=\sum\lambda_i\varphi_{\sigma_i}\Psi_{e_i}\qquad(e_i\in\mathfrak{E},\ \sigma_i\in\mathfrak{B})$$

est une application linéaire et isométrique d'un ensemble dense de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{L}$, qui se prolonge par continuité en une seule application linéaire et isométrique de $\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{L}$. D'autre part, pour $h=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ $(e_i\in\mathfrak{E},\ \sigma_i\in\mathfrak{B})$ nous avons

$$\Psi_{\mathbf{E}(\sigma)h}=\Psi_{\Sigma\lambda_i\mathbf{E}(\sigma\cap\sigma_i)e_i}=\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma\cap\sigma_i}\Psi_{e_i}=\varphi_\sigma\Psi_h.$$

Par continuité on en déduit

$$\varphi_\sigma\mathfrak{L}\subset\mathfrak{L}\ \text{ et }\ \Psi_{\mathbf{E}(\sigma)h}=\varphi_\sigma\Psi_h\qquad(h\in\mathfrak{H},\ \sigma\in\mathfrak{B}).\tag{4.12}$$

Remarquons maintenant que la multiplication par φ_σ est une projection orthogonale de $\sum_1^n\oplus L^2_\mu$ et que la famille de ces projections est une famille spectrale dans $\sum_1^n \oplus L_\mu^2$. En vertu de (4. 12) cette famille permute avec la projection orthogonale Q de $\sum_1^n \oplus L_\mu^2$ sur $\mathfrak{L}$.

Nous pouvons toujours supposer que $\mu(\sigma)$ est une mesure bornée [car dans le cas contraire on n'aurait qu'à remarquer que $\chi_0(t)$ (*voir* la proposition 1. 1) sont aussi de rang n au plus, et de remplacer la mesure $\mu(\sigma)$ par la variation totale indéfinie $\nu(\sigma)$ de $E(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{S};\mathfrak{S}^*)$, qui est une mesure bornée]. Alors $\Psi_k=\{\delta_{k1}\varphi_T,\dots,\delta_{kn}\varphi_T\}$, où δ_{ki} est le symbole de Kronecker, appartient à $\sum_1^n \oplus L_\mu^2$. On vérifie sans peine que les éléments $\varphi_\sigma\Psi_k$ $(\sigma\in\mathfrak{B}$; $k=1,2,\dots,n)$ engendrent $\sum_1^n \oplus L_\mu^2$ tout entier. Par conséquent, les éléments $\varphi_\sigma(Q\Psi_k)=Q\varphi_\sigma\Psi_k$ $(\sigma\in\mathfrak{B};\ k=1,2,\dots,n)$ engendrent $\mathfrak{L}$. Mais $Q\Psi_k$ appartenant à $\mathfrak{L}$ est de la forme Ψ_{e_k}, où $e_k\in\mathcal{H}$ $(k=1,2,\dots,n)$ et $\varphi_\sigma(Q\Psi_k)=$ $=\Psi_{\mathbf{E}(\sigma)e_k}$. Il en résulte que les éléments $\mathbf{E}(\sigma)e_k$ $(\sigma\in\mathfrak{B};\ k=1,2,\dots,n)$ engendrent $\mathcal{H}$, donc que $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ est de multiplicité n au plus, c. q. f. d.

On peut compléter cette proposition par la remarque suivante:

La multiplicité de $\mathbf{E}(\sigma)$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ *est égale au plus grand des nombres* n *tels que* $\mu(\Omega_n)\neq 0$.

En effet, si $\mu(\Omega_n)\neq 0$ et $\mu(\Omega_{n+p})=0$ $(p=1,2,\dots)$ on peut poser $\chi(t)=0$ sur Ω_{n+p} $(p=1,2,\dots)$. En vertu de la proposition 4. 4, la multiplicité de $\mathbf{E}(\sigma)$ est plus petite ou égale à n. Si elle était $<n$ on aurait, en vertu de la même proposition 4. 4, $\mu(\Omega_n)=0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.

Remarquons aussi le suivant cas particulier $(n=1)$ de la proposition 4. 4:

Les $\chi(t)$ *sont de rang* $\leqq 1$ *si et seulement s'il existe un* $e\in\mathcal{H}$, *tel que les éléments* $\mathbf{E}(\sigma)e$ $(\sigma\in\mathfrak{B})$ *engendrent* $\mathcal{H}$ *tout entier.*

Un deuxième problème qui se pose est de savoir comment le rang des opérateurs $\chi(t)$ dépend-il de $E(\sigma)$. Pour répondre à cette question soit $\mathfrak{F}\subset\mathcal{H}$ un autre sous-espace dense de $\mathcal{H}$, muni d'une nouvelle norme $\|\cdot\|_1$ ayant les mêmes propriétés que $\mathfrak{S}$ (*voir* le commencement du § 3). Soit $\chi_{\mathfrak{F}}(t)\in\mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F}^*)$ la fonction donnée par la représentation intégrale

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_{\mathfrak{F}}(t)e|f\rangle d\mu(t)\qquad(\sigma\in\mathfrak{B})$$

où $e,f\in\mathfrak{F}$ et $E(\sigma)$ est considéré dans $\mathfrak{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{F}^*)$. Posons aussi $\chi_{\mathfrak{S}}(t)=\chi(t)$ $(t\in T)$. La réponse à la question posée est donnée par le fait suivant:

Les opérateurs $\chi_{\mathfrak{S}}(t)$ *et* $\chi_{\mathfrak{F}}(t)$ *ont le même rang* μ-pp.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 2. 4. En effet, on n'a qu'à remarquer que le rang de $\chi_{\mathcal{E}}(t)$ [resp. $\chi_{\mathcal{F}}(t)$] est égal à la dimension de $\mathcal{E}(t)=\overline{\chi_{\mathcal{E}}(t)\mathcal{E}}$ [resp. $\mathcal{F}(t)=\overline{\chi_{\mathcal{F}}(t)\mathcal{F}}$] et que $\mathcal{H}(\mathcal{E})=\mathcal{H}=\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

5. L'invariance unitaire des extensions de Neumark des familles semi-spectrales

Soit $F(\sigma)$ $(\sigma\in\mathcal{B})$ une autre famille semi-spectrale dans $\mathcal{H}$ et soit $\mathbf{F}(\sigma)$ $[\mathbf{F}(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathcal{H}_F;\mathcal{H}_F), \mathcal{H}_F\supset\mathcal{H}]$ l'extension de NEUMARK de $F(\sigma)$ $(\sigma\in\mathcal{B})$. Soit μ une mesure positive (sur $\mathcal{B}$), telle que $E(\sigma)$ et $F(\sigma)$ soient absolument continues par rapport à $\mu(\sigma)$. Soient $\chi_E(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$, et $\chi_F(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ les fonctions déterminées par les représentations intégrales

$$\langle E(\sigma)e|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_E(t)e|f\rangle d\mu(t),\quad\text{resp.}\quad\langle F(\sigma)e|f\rangle=\int_\sigma\langle\chi_F(t)e|f\rangle d\mu(t),$$

où $e,f\in\mathcal{E}$ et $\sigma\in\mathcal{B}$ sont arbitraires.

Proposition 5. 1. *Les familles spectrales* $\mathbf{E}(\sigma)$ *et* $\mathbf{F}(\sigma)$ *sont unitairement équivalentes*[20]) *si et seulement si* $\chi_E(t)$ *et* $\chi_F(t)$ *ont le même rang* μ-pp.

Tout ce paragraphe sera consacré à la démonstration de cette proposition, effectuée par étapes.

Supposons que $\mathbf{E}(\sigma)$ et $\mathbf{F}(\sigma)$ sont unitairement équivalentes. En nous appuyant sur la proposition 2. 4, nous allons montrer que $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang μ-pp. En ce but, soit $\mathcal{E}'=\Phi^{-1}\mathcal{E}$ [*voir* la remarque[20])] et posons $\|e'\|_1'=\|\Phi e'\|_1$ pour tout $e'\in\mathcal{E}'$. Soit $\chi'(t)=\Phi^*\chi_F(t)\Phi$, où $\Phi^*\in\mathfrak{L}(\mathcal{E}^*;\mathcal{E}'^*)$ est l'adjoint de Φ considéré dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E}';\mathcal{E})$. Pour $e',f'\in\mathcal{E}'$ nous avons

$$\langle\mathbf{E}(\sigma)e'|f'\rangle=(\mathbf{E}(\sigma)e'|f')=(\Phi^*\mathbf{F}(\sigma)\Phi e'|f')=(\mathbf{F}(\sigma)\Phi e'|\Phi f')=$$
$$=(F(\sigma)\Phi e'|\Phi f')=\langle F(\sigma)\Phi e'|\Phi f'\rangle=\int_\sigma\langle\chi_F(t)\Phi e'|\Phi f'\rangle d\mu(t)=$$
$$=\int_\sigma\langle\Phi^*\chi_F(t)\Phi e'|f'\rangle d\mu(t)=\int_\sigma\langle\chi'(t)e'|f'\rangle d\mu(t)\qquad(\sigma\in\mathcal{B}),$$

ce qui montre que $\chi'(t)$ est la fonction appartenant à $\mathfrak{L}(\mathcal{E}';\mathcal{E}'^*)$ donnée par la representation du type (2. 10). D'autre part, comme

$$\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i'=\sum\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)\Phi^{-1}e_i=\Phi^{-1}\sum_i\lambda_i\mathbf{F}(\sigma_i)e_i\qquad(\{e_i\}\subset\mathcal{E},\ \{e_i'\}\subset\mathcal{E}')$$

et Φ^{-1} est unitaire, il résulte $\mathcal{H}(\mathcal{E}')=\mathcal{H}_E$. Par conséquent (en tenant compte

[20]) C'est-à-dire qu'il existe un opérateur isométrique Φ de $\mathcal{H}_E$ $(=\mathcal{H})$ *sur* $\mathcal{H}_F$ (opérateur unitaire), tel que $\mathbf{F}(\sigma)\Phi=\Phi\mathbf{E}(\sigma)$ pour tout $\sigma\in\mathcal{B}$.

de la proposition 2.4) nous obtenons que $\overline{\chi_E(t)\mathcal{E}}$ et $\overline{\chi'(t)\mathcal{E}'}$ ont la même dimension μ-pp, donc que $\chi_E(t)$ et $\chi'(t)$ ont le même rang μ-pp. Mais en vertu de la définition de $\chi'(t)$, son rang ne peut dépasser celui de $\chi_F(t)$. Il résulte que μ-pp le rang de $\chi_E(t)$ ne dépasse pas celui de $\chi_F(t)$. En changeant les rôles de $\mathbf{E}(\sigma)$ et $\mathbf{F}(\sigma)$ nous obtenons aussi l'inégalité inverse. Par conséquent $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang μ-pp.

Pour démontrer l'implication inverse nous utiliserons le suivant

Lemme. *Soit $\{h_n(t)\}$ une suite de fonctions μ-mesurables, telles que $\Sigma|h_n(t)|^2\in L^1_\mu$. Il existe alors un (et un seul) $h^*\in\mathcal{H}$, tel que $(\chi h^*)(t)=$ $=\sum_n h_n(t)e_n^*(t)$* μ-pp. *De plus*

$$\|h^*\|^2=\int_T\Big[\sum_n|h_n(t)|^2\varphi_{\Sigma_n}(t)\Big]d\mu(t) \tag{5.1}$$

où $\Sigma_n=T-\bigcup_{k=1}^{n-1}\Omega_k$.

Démonstration. Remarquons d'abord que $h^*(t)=\sum_n h_n(t)e_n^*(t)$ est défini μ-pp et que pour tout $e\in\mathcal{E}$

$$|\langle h^*(t)|e\rangle|^2\leqq\Big[\sum_n|h_n(t)|\,|\langle e_n^*(t)|e\rangle|\Big]^2\leqq\Big[\sum_n|h_n(t)|^2\Big]\Big[\sum_n|\langle e_n^*(t)|e\rangle|^2\Big]=$$
$$=\Big[\sum_n|h_n(t)|^2\Big]\langle\chi(t)e|e\rangle,$$

ce qui montre que $h^*(t)$ vérifie (2.26). Par conséquent (en vertu de la proposition 2.5) il existe un (et un seul) $h^*\in\mathcal{H}$, tel que $(\chi h^*)(t)=\sum_n h_n(t)e_n^*(t)$ μ-pp.

Il nous reste à démontrer la relation (5.1). Dans ce but remarquons d'abord que si $h=\sum_i\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ $(e_i\in\mathcal{E})$, on a

$$(\chi h)(t)=\chi(t)h(t)=\sum_n\overline{\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle}e_n^*(t)\quad\mu\text{-pp}$$

où $h(t)=\sum_i\lambda_i\varphi_{\sigma_i}(t)e_i$; de plus

$$\|h\|^2=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j(\mathbf{E}(\sigma_i\cap\sigma_j)e_i|e_j)=\sum_{i,j}\lambda_i\bar\lambda_j\int_{\sigma_i\cap\sigma_j}\langle\chi(t)e_i|e_j\rangle d\mu(t)=$$
$$=\int_T\langle\chi(t)h(t)|h(t)\rangle d\mu(t)=\int_T\Big[\sum_n|\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2\Big]d\mu(t)=$$
$$=\int_T\Big[\sum_n|\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2\varphi_{\Sigma_n}(t)\Big]d\mu(t),$$

ce qui nous montre que (5.1) est vraie pour $h^*=\Sigma\lambda_i\mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ $(e_i\in\mathcal{E})$. En utilisant le fait que ces éléments engendrent $\mathcal{H}$, on obtient aisément une suite

$\{h_p\}$ de tels éléments convergeant vers h^* et une suite $\{h'_n(t)\}$ de fonctions numériques μ-mesurables, telles que $\sum_n |h'_n(t)|^2 \in L^1_\mu$ et

$$\lim_{p\to\infty} \int_T [\sum_n |\langle e^*_n(t)|h_p(t)\rangle - h'_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t) = 0.$$

Il résulte (par continuité)

$$\|h^*\|^2 = \int_T [\sum_n |h'_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t) \tag{5.2}$$

et

$$\langle \mathbf{E}(\sigma)h^*|e\rangle = (\mathbf{E}(\sigma)h^*|e) = \lim_{p\to\infty} (\mathbf{E}(\sigma)h_p|e) =$$
$$= \lim_{p\to\infty} \int_\sigma [\sum_n \overline{\langle e^*_n(t)|h_p(t)\rangle} \langle e^*_n(t)|e\rangle] d\mu(t) = \int_\sigma [\sum_n h'_n(t) \langle e^*_n(t)|e\rangle] d\mu(t)$$

quel que soit $e \in \mathfrak{E}$ et $\sigma \in \mathfrak{B}$. Par conséquent,

$$\sum_n h_n(t) e^*_n(t) = (\chi h^*)(t) = \sum_n h'_n(t) e^*_n(t) \quad \mu\text{-pp},$$

d'où, en tenant compte de la proposition 4.2 (iii) et de la proposition 4.3, on obtient $h_n(t) = h'_n(t)$ μ-pp pour $t \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_{n+k} = \Sigma_n$. De cette manière $h_n(t)\varphi_{\Sigma_n}(t) = h'_n(t)\varphi_{\Sigma_n}(t)$, donc

$$\int_T [\sum_n |h_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t) = \int_T [\sum_n |h'_n(t)|^2 \varphi_{\Sigma_n}(t)] d\mu(t),$$

d'où, en vertu de (5.2) on obtient (5.1), c. q. f. d.

Revenons maintenant à la démonstration de la proposition 5.1. Supposons donc que $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang μ-pp. En posant $\chi_E(t) = \chi_F(t) = 0$ sur l'ensemble exceptionnel nous pouvons supposer que $\chi_E(t)$ et $\chi_F(t)$ ont le même rang pour tout $t \in T$. Par conséquent les ensembles $\Sigma_n(E)$ et $\Sigma_n(F)$ où le rang de $\chi_E(t)$, resp. $\chi_F(t)$ dépasse n sont identiques. Soient

$$\chi_E(t)e = \sum_n \overline{\langle e^*_n(t)|e\rangle} e^*_n(t) \quad \text{et} \quad \chi_F(t)e = \sum_n \overline{\langle f^*_n(t)|e\rangle} f^*_n(t)$$

les décompositions données par la proposition 4.2. Pour $h = \sum_i \lambda_i \mathbf{E}(\sigma_i)e_i$ et $k = \sum_j \lambda'_j \mathbf{F}(\sigma'_j)e'_j$ posons

$$\Phi(t)h(t) = \sum_n \overline{\langle e^*_n(t)|h(t)\rangle} f^*_n(t) \quad \text{et} \quad \Phi'(t)k(t) = \sum_n \overline{\langle f^*_n(t)|k(t)\rangle} e^*_n(t),$$

où $h(t) = \sum_i \lambda_i \varphi_{\sigma_i}(t) e_i$ et $k(t) = \sum \lambda'_j \varphi_{\sigma'_j}(t) e'_j$ $(e_i, e'_j \in \mathfrak{E})$. En vertu du lemme précédent il existe un $\Phi h \in \mathcal{H}_E$ et un $\Phi' k \in \mathcal{H}_E$, tels que $(\chi_F \Phi h)(t) = \Phi(t)h(t)$ et $(\chi_E \Phi' k)(t) = \Phi'(t)k(t)$ μ-pp. De plus [en vertu de (5. 1)]

$$\begin{aligned}\|\Phi h\|^2 &= \int_T \Big[\sum_n |\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2 \varphi_{\Sigma_n(F)}(t)\Big] d\mu(t) = \\ &= \int_T \Big[\sum_n |\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2 \varphi_{\Sigma_n(E)}(t)\Big] d\mu(t) = \int_T \Big[\sum_n |\langle e_n^*(t)|h(t)\rangle|^2\Big] d\mu(t) = \\ &= \int_T \langle \chi_E(t)h(t)|h(t)\rangle d\mu(t) = \|h\|^2\end{aligned}$$

et d'une manière analogue on obtient $\|\Phi' k\| = \|k\|$. Il résulte que $\Phi \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_E; \mathcal{H}_F)$ et $\Phi' \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}_F; \mathcal{H}_E)$ sont deux opérateurs isométriques. D'autre part

$$\begin{aligned}(\Phi h|k) &= \sum_j \bar{\lambda}_j'(\mathbf{F}(\sigma_j')\Phi h|e_j') = \sum_j \bar{\lambda}_j' \int_{\sigma_j'} \langle(\chi_F \Phi h)(t)|e_j'\rangle d\mu(t) = \\ &= \sum_j \bar{\lambda}_j' \int_{\sigma_j'} \langle \Phi(t)h(t)|e_j'\rangle d\mu(t) = \int_T \langle \Phi(t)h(t)|k(t)\rangle d\mu(t) = \\ &= \int_T \overline{\langle \Phi'(t)k(t)|h(t)\rangle} d\mu(t) = \overline{\sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \langle \Phi'(t)k(t)|e_i\rangle d\mu(t)} = \\ &= \overline{\sum_i \lambda_i \int_{\sigma_i} \langle(\chi_E \Phi' k)(t)|e_i\rangle d\mu(t)} = \sum_i \lambda_i \overline{(\mathbf{E}(\sigma_i)\Phi' k|e_i)} = \\ &= \sum_i \lambda_i (\mathbf{E}(\sigma)e_i|\Phi' k) = (h|\Phi' k),\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit par continuité que $\Phi' = \Phi^*$ donc que Φ est unitaire. Il nous reste à démontrer que $\mathbf{F}(\sigma)\Phi = \Phi \mathbf{E}(\sigma)$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{B}$. Or

$$\begin{aligned}(\mathbf{F}(\sigma)\Phi h|k) &= \sum_j \bar{\lambda}_j'(\mathbf{F}(\sigma \cap \sigma_j')\Phi h|e_j') = \sum_j \bar{\lambda}_j' \int_{\sigma \cap \sigma_j'} \langle \Phi(t)h(t)|e_j'\rangle d\mu(t) = \\ &= \int_\sigma \langle \Phi(t)h(t)|k(t)\rangle d\mu(t) = \overline{\int_\sigma \langle \Phi'(t)k(t)|h(t)\rangle d\mu(t)} = \\ &= \overline{(\mathbf{E}(\sigma)\Phi' k|h)} = (\mathbf{E}(\sigma)h|\Phi' k) = (\Phi \mathbf{E}(\sigma)h|k),\end{aligned}$$

d'où il résulte $\mathbf{F}(\sigma)\Phi = \Phi \mathbf{E}(\sigma)$, ce qui achève la démonstration de la proposition 5. 1.

6. Applications à l'étude spectrale et des invariants unitaires d'un opérateur autoadjoint borné [21])

Commençons par démontrer le fait suivant:

Pour tout système fini d'opérateurs $A_j \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ *il existe un sous-espace* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{H}$, *muni d'une nouvelle norme* $\|\cdot\|_1$ *vérifiant les hypothèses du* § 3, *tel que* $A_j \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}$ *pour* $j=1, 2, \ldots, n$.

En ce but, considérons d'abord une base orthogonale $\{h_m\}$ de $\mathcal{H}$ et posons $e_1 = h_1$. Orthonormons le système $\{e_1, A_j e_1, h_2$ $(j=1, 2, \ldots, n)\}$ sans changer e_1. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_{p_1}\}$ le système obtenu. Orthonormons $\{e_i, A_j e_i, h_3$ $(i=1, 2, \ldots, p_1;\ j=1, 2, \ldots, n)\}$ sans changer $\{e_i\}_1^{p_1}$ etc. Si après m telles opérations le système fini orthonormal obtenu est $\{e_i\}_1^{p_m}$, le nouveau système sera obtenu en orthonormant $\{e_i, A_j e_i, h_{m+1}$ $(i=1, 2, \ldots, p_m;\ j=1, 2, \ldots, n)\}$ sans changer $\{e_i\}_1^{p_m}$. De cette manière, on obtient (par récurrence) une suite orthonormale $\{e_p\}$, telle que chaque h_m et $A_j e_p$ sont des combinaisons linéaires finies de $\{e_p\}$. Soit $\mathfrak{E}$ l'espace linéaire de ces combinaisons finies. Alors $\mathfrak{E} \subset \mathcal{H}$ et $A_j e_p \in \mathfrak{E}$ pour tout j et p, donc $A_j \mathfrak{E} \subset \mathfrak{E}$; la démonstration s'achève comme indiquée dans la remarque [12]).

L'espace $\mathfrak{E}$, que nous venons de construire, a aussi les deux propriétés suivantes: [22])

(i) *Tout élément de* $\mathfrak{E}$ *est une combinaison linéaire finie d'éléments d'un ensemble dénombrable* $\mathfrak{E}_{00}$ *de* $\mathfrak{E}$;

(ii) $\mathcal{H}$ *est un sous-espace dense de* $\mathfrak{E}^*$.

La propriété (i) est évidente (en posant $\mathfrak{E}_{00} = \{e_p\}$). En ce qui concerne (ii), remarquons d'abord que $\mathfrak{E}$ est un espace pré-hilbertien. Soit p le plongement identique de $\mathfrak{E}$ dans $\mathcal{H}$. Ce plongement se prolonge par continuité en un opérateur $p_1 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{E}_1; \mathcal{H})$, $\mathfrak{E}_1$ étant l'espace hilbertien obtenu par la complétion de $\mathfrak{E}$. Il est évident (*voir* la construction de $\mathfrak{E}$) que $p_1 e_1 = 0$ entraîne $e_1 = 0$ et que $\mathfrak{E}_1^* = \mathfrak{E}^*$. Si $\mathcal{H}$ n'était pas dense dans $\mathfrak{E}^*$, il existerait un $e_0^{**} \in (\mathfrak{E}^*)^* = \mathfrak{E}_1^{**} = \mathfrak{E}_1 (e_0^{**} \neq 0)$, tel que $\langle h | e_0^{**} \rangle = 0$ pour tout $h \in \mathcal{H}$. Mais $h \in \mathcal{H} \subset \mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}_1^*$ est en fait $p_1^* h$, d'où il résulte $(h | p_1 e_0^{**}) = \langle h | e_0^{**} \rangle = 0$, donc $p_1 e_0^{**} = 0$ et par conséquent $e_0^{**} = 0$, en contradiction avec $e_0^{**} \neq 0$. Il résulte que $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathfrak{E}^*$, ce qui achève la démonstration de la propriété (ii).

---

[21]) Quoique les méthodes employées dans ce paragraphe soient de puissance plus grande, nous n'envisageons que ce cas simple pour mieux mettre en évidence la signification des résultats acquis dans les paragraphes précédents..

[22]) Nous n'avons pas imposé à $\mathfrak{E}$ ces conditions dès le commencement, car elles ne sont pas toujours remplies (par exemple, dans la théorie spectrale des opérateurs d'un espace nucléaire; *voir* [10]).

Tout espace $\mathcal{E}$ ayant les propriétés (i), (ii), vérifiant les hypothèses du § 3 et invariant par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_n$, sera appelé *admis* par rapport à $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Soit maintenant A un opérateur autoadjoint borné de $\mathcal{H}$. Soit $E(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) la famille spectrale attachée à A [c'est-à-dire telle que $A=\int\limits_{R_1} t\,dE(t)$]; elle est univoquement déterminée et on a $E([-\|A\|, \|A\|])=I$. Soit $\mathcal{E}$ un espace admis par rapport à A. Soit $\nu(\sigma)$ la variation totale indéfinie de $E(\sigma)$ considérée dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$. Des relations (2.7) et (2.9) il résulte que le support[23]) de $\nu(\sigma)$ est aussi inclus dans $[-\|A\|, \|A\|]$. Soit $\mu(\sigma)$ une mesure borélienne quelconque à support compact, telle que $E(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à $\mu(\sigma)$ [par exemple, on peut prendre $\mu(\sigma)=\nu(\sigma)$]. Pour un $h\in\mathcal{H}$, soit $(\chi h)(t)\in\mathcal{E}^*$ la fonction définie sur T, déterminée μ-pp, telle que

(6. 1) $$\langle E(\sigma)h|e\rangle=\int\limits_{\sigma}\langle(\chi h)(t)|e\rangle d\mu(t),$$

quel que soit $e\in\mathcal{E}$ et σ borélien de R^1. Comme $\langle(\chi h)(t)|e\rangle$ est μ-mesurable pour tout $e\in\mathcal{E}$, il résulte [en vertu du fait que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^*$ sont du type dénombrable[24])] que la fonction $(\chi h)(t)$ est μ-mesurable[25]). D'autre part $\|(\chi h)(t)\|_1$ est μ-intégrable (voir la proposition 3. 2), par conséquent, $(\chi h)(t)\in\mathcal{E}^*$ *est une fonction μ-intégrable.* De cette manière, la relation (6. 1) peut être écrite

(6. 2) $$E(\sigma)h=\int\limits_{\sigma}(\chi h)(t)d\mu(t) \qquad [E(\sigma)h\in\mathcal{E}^*, h\in\mathcal{H}]$$

pour tout σ borélien de R^1.

Soit $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ la fonction définie sur T, déterminée μ-pp, telle que

(6. 3) $$\langle E(\sigma)e|f\rangle=\int\limits_{\sigma}\langle\chi(t)e|f\rangle d\mu(t)$$

quels que soient $e,f\in\mathcal{E}$ et σ borélien de R^1. Comme nous avons déjà montré (§ 2), nous pouvons supposer que

(6. 4) $$(\chi h)(t)\in\mathcal{E}(t)=\overline{\chi(t)\mathcal{E}} \qquad (t\in T, h\in\mathcal{H}).$$

---

[23]) Pour une mesure $\mu(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) le support $S(\mu)$ est le complémentaire de la réunion des ensembles ouverts G, tels que $\mu(G)=0$. L'intégration par rapport à μ se fait en réalité sur $S(\mu)$.

[24]) En effet, $\mathcal{E}^*$ est du type dénombrable car $\mathcal{H}$ est dense dans $\mathcal{E}^*$ et d'autre part $\mathcal{H}$ est lui-même du type dénombrable.

[25]) En ce qui concerne la théorie de l'intégration pour des fonctions à valeurs vectorielles (devenue déjà classique) on peut consulter N. Dunford—J. Schwarz, *Linear Operators,* Part I (New York, 1958) ou E. Hille—R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-groups* (New York, 1957).

Proposition 6.1. *La fonction $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ est μ-intégrable.*

Démonstration. Nous allons utiliser la proposition 4.2. En effet, nous avons $\chi(t)e=\sum\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}e_n^*(t)$, où $\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2\in L_\mu^1$ et $\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}$ est μ-mesurable ($e\in\mathscr{E}$; $n=1,2,\ldots$). Il résulte que $e_n^*(t)\in\mathscr{E}^*$ est une fonction μ-mesurable ($n=1,2,\ldots$); par conséquent, il existe une suite $\{\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\}_m$ de fonctions étagées μ-mesurables tendant (dans $\mathscr{E}^*$) vers $e_n^*(t)$ μ-pp. Considérons l'opérateur $\chi_{e_n}(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ défini par $\chi_{e_n}(t)=\overline{\langle e_n^*(t)|e\rangle}e_n^*(t)$; soit $\chi_m(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ défini par

$$\chi_m(t)e=\overline{\langle\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)|e\rangle}\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)=\sum_{k,h}\overline{\langle e_{mk}^*|e\rangle}e_{mh}^*\varphi_{\sigma_{mk}\cap\sigma_{mh}}(t).$$

La fonction $\chi_m(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ est alors une fonction étagée μ-mesurable. D'autre part

$$\|[\chi_m(t)-\chi_{e_n}(t)]e\|_1\leqq[\|e_n^*(t)-\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\|_1\|\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\|_1+$$
$$+\|e_n^*(t)-\sum_k e_{mk}^*\varphi_{\sigma_{mk}}(t)\|_1\|e_n^*(t)\|_1]\|e\|_1 \qquad (e\in\mathscr{E}),$$

ce qui montre que $\chi_m(t)\to\chi_{e_n}(t)$ [dans $\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$] μ-pp. Par conséquent $\chi_{e_n}(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ est une fonction μ-mesurable. Il résulte que $\sum_{h=1}^N\chi_{e_n}(t)$ est une fonction μ-mesurable, d'où il résulte (en tenant compte de nouveau de la proposition 4.2) que $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ est une fonction μ-mesurable. Comme $\|\chi(t)\|_1\leqq\sum_n\|e_n^*(t)\|_1^2\in L_\mu^1$, il résulte que $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)$ est une fonction μ-intégrable, c. q. f. d.

La proposition 6.1 nous permet d'écrire (6.3) sous la forme

$$E(\sigma)=\int_\sigma\chi(t)d\mu(t) \qquad [E(\sigma)\in\mathfrak{L}(\mathscr{E};\mathscr{E}^*)] \tag{6.5}$$

quel que soit σ borélien de R^1. Pour qu'on puisse indiquer les conséquences des faits que nous venons de démontrer, quelques considérations supplémentaires seront nécessaires.

Soit σ_μ un intervalle borné contenant $S(\mu)$ [*voir* la remarque[23])] et soit $\{\Delta^{(n)}\}$ une suite de partitions finies ($\Delta^{(n)}=\{\sigma_k^{(n)}\}_{k=1}^{N_n}$) de σ_μ en intervalles, de norme $\nu(\Delta^{(n)})=\sup_k|\sigma_k^{(n)}|\to 0$. Soit X un espace de Banach quelconque et soit $x(t)\in X$ une fonction μ-intégrable.

Lemme. *Il existe une suite partielle $\{\Delta^{(n_p)}\}\subset\{\Delta^{(n)}\}$, telle que, pour $p\to\infty$, on a μ-pp*

$$\frac{1}{\mu[\sigma_{k_0}^{(n_p)}]}\int_{\sigma_{k_0}^{(n_p)}}x(t)d\mu(t)\to x(t_0) \qquad (\textit{dans } X) \tag{6.6}$$

où, pour chaque p, $\sigma_{k_0}^{(n)}$ est choisi de façon qu'il contienne le point t_0 ($k_0=k(t_0,p)$).

Démonstration. Soit $x_n(t)\in X$ la fonction définie par

$$x_n(t)=\sum_k \{\mu[\sigma_k^{(n)}]\}^{-1}\Big[\int_{\sigma_k^{(n)}} x(\tau)d\mu(\tau)\Big]\varphi_{\sigma_k^{(n)}}(t).$$

Alors $x_n(t)$ est aussi μ-intégrable et

$$\int_{\sigma_\mu}|x_n(t)-x(t)|d\mu(t)=\sum_k\int_{\sigma_k^{(n)}}\Big|[\mu(\sigma_k^{(n)})]^{-1}\int_{\sigma_k^{(n)}}x(\tau)d\mu(\tau)-x(t)\Big|d\mu(t)=$$

$$=\sum_k[\mu(\sigma_k^{(n)})]^{-1}\int_{\sigma_k^{(n)}}\int_{\sigma_k^{(n)}}|[x(\tau)-x(t)]d\mu(\tau)|d\mu(t)\leqq$$

$$\leqq\sum_k[\mu(\sigma_k^{(n)})]^{-1}\int_{\sigma_k^{(n)}}\int_{\sigma_k^{(n)}}|x(\tau)-x(t)|d\mu(\tau)d\mu(t)=I_n(x).$$

On vérifie sans peine que $I_n(x)\leqq 2\int_{\sigma_\mu}|x(t)|d\mu(t)$ et que si $y(t)\in X$ est une autre fonction μ-intégrable alors $I_n(x+y)\leqq I_n(x)+I_n(y)$. Utilisons maintenant le fait que les fonctions continues (à valeurs dans X) forment un ensemble dense dans l'espace des fonctions (à valeurs dans X) μ-intégrables. Pour $\varepsilon>0$ il existe une fonction continue $c_\varepsilon(t)\in X$, telle que

$$\int_{\sigma_\mu}|c_\varepsilon(t)-x(t)|d\mu(t)<\varepsilon \qquad (\varepsilon>0 \text{ donné}).$$

En vertu des propriétés de $I_n(x)$ nous avons

$$I_n(x)\leqq I_n(c_\varepsilon)+I_n(x-c_\varepsilon)\leqq I_n(c_\varepsilon)+2\int_{\sigma_\mu}|x-c_\varepsilon|d\mu(t)\leqq I_n(c_\varepsilon)+2\varepsilon.$$

Or, il est évident [en vertu de la continuité uniforme de $c_\varepsilon(t)$] que $I_n(c_\varepsilon)\to 0$ pour $n\to\infty$. Par conséquent, $\limsup I_n(x)\leqq 2\varepsilon$, d'où il résulte que $\lim I_n(x)=0$, donc aussi

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\sigma_\mu}|x(t)-x_n(t)|d\mu(t)=0. \tag{6.7}$$

Choisissons une suite partielle $\{n_p\}\subset\{n\}$, telle que

$$\sum_p\int_{R^1}|x(t)-x_{n_p}(t)|d\mu(t)=\sum_p\int_{\sigma_\mu}|x(t)-x_{n_p}(t)|d\mu(t)<\infty,$$

ce qui est possible en vertu de (6.7). Alors du théorème de Beppo Levi il résulte que $\sum_p|x(t)-x_{n_p}(t)|$ est μ-intégrable. Par conséquent $\sum_p|x(t)-x_{n_p}(t)|<$ $<\infty$ μ-pp, ce qui entraîne $|x_{n_p}(t)-x(t)|\to 0$ μ-pp, d'où, en tenant compte de la définition des fonctions $x_n(t)$, on obtient la relation (6.6), c. q. f. d.

En appliquant ce lemme aux fonctions $(\chi h)(t)\in\mathcal{E}^*$ et $\chi(t)\in\mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)$ nous obtenons les deux propositions suivantes:

Proposition 6.2. *Pour tout $h\in\mathcal{H}$ il existe une suite partielle $\{\Delta^{(n_p)}\}\subset\{\Delta^{(n)}\}$ [où $n_p=n_p(h)$], telle que pour $p\to\infty$ on ait μ-pp*

$$\frac{E(\sigma_{k_0}^{(n_p)})\,h}{\mu(\sigma_{k_0}^{(n_p)})}\to(\chi h)(t_0)\qquad (\textit{dans } \mathcal{E}^*).$$

Proposition 6.3. *Il existe une suite partielle $\{\Delta^{(n_p)}\}\subset\{\Delta^{(n)}\}$, telle que pour $p\to\infty$ on ait μ-pp*

$$\frac{E(\sigma_{k_0}^{(n_p)})}{\mu(\sigma_{k_0}^{(n_p)})}\to\chi(t_0)\qquad [\textit{dans } \mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)].$$ [26])

Choisissons les partitions $\Delta^{(n)}$ de sorte que leurs points de division soient de μ-mesure nulle, ce qui est possible en vertu du fait que l'ensemble des points t tels que $\mu(\{t\})\neq 0$, est dénombrable. Nous pouvons poser $\chi(t)=0$ dans les points de division de $\Delta^{(n_p)}$ $(p=1,2,\ldots)$, aussi bien que dans les points exceptionnels de la proposition 6.3, car ils forment un ensemble de μ-mesure nulle. On déduit alors de la proposition 6.3 le théorème suivant:

En dehors d'un ensemble de μ-mesure nulle [où $\chi(t)=0$], pour tout $t\in R^1$ il existe deux suites $\{t_n'\}$ et $\{t_n''\}$ convergeant vers t, telles que $t_n'<t'<t_n''$ et

$$\frac{E([t_n',t_n''])}{\mu([t_n',t_n''])}\to\chi(t)\qquad [\textit{dans } \mathfrak{L}(\mathcal{E};\mathcal{E}^*)]. \tag{6.8}$$

Tous ces résultats sont en fait des conséquences de la propriété (ii) de $\mathcal{E}$. En utilisant maintenant aussi la propriété (i) de $\mathcal{E}$, nous allons faire l'étude spectrale des opérateurs autoadjoints bornés.

Convenons d'abord d'appeler *vecteur propre généralisé* de A correspondant au point $t\in R^1$ tout $e^*\in\mathcal{E}^*$ vérifiant

$$\langle e^*|Ae\rangle=t\langle e^*|e\rangle \tag{6.9}$$

pour tout $e\in\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{E}^*(t)$ l'espace formé par ces vecteurs pour t fixé. Evidemment, $\mathcal{E}^*(t)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^*$.

Proposition 6.4. *$\mathcal{E}^*(t)\cap\mathcal{H}\neq\{0\}$ si et seulement si t est une valeur propre (dans $\mathcal{H}$) de A. Dans ce cas $\mathcal{E}^*(t)\cap\mathcal{H}$ est l'espace des vecteurs propres (dans $\mathcal{H}$) de A correspondants au point t.*

Démonstration. Soit $h_0\in\mathcal{H}$ un vecteur propre de A, correspondant à la valeur propre t_0 $(Ah_0=t_0h_0)$. Nous avons alors pour tout $e\in\mathcal{E}$

$$\langle h_0|Ae\rangle=(h_0|Ae)=(Ah_0|e)=t_0(h_0|e)=t_0\langle h_0|e\rangle,$$

[26]) La première de ces deux propositions est analogue à une proposition obtenue antérieurement par Katz [16] dans des conditions semblables.

donc h_0, considéré dans $\mathscr{E}^*$, vérifie (6.9). Il résulte que $h_0 \in \mathscr{E}^*(t)$. De cette manière nous avons démontré que si t_0 est une valeur propre (dans $\mathscr{H}$) de A, alors $\mathscr{E}^*(t_0)$ contient l'espace des vecteurs propres (dans $\mathscr{H}$) de A, correspondants au point t_0. Il nous reste à démontrer que si $\mathscr{E}^*(t_0) \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$, alors t_0 est une valeur propre (dans $\mathscr{H}$) de A et que tout élément de $\mathscr{E}(t_0) \cap \mathscr{H}$ est un vecteur propre (dans $\mathscr{H}$) de A, correspondant au point t_0. En effet, soit $0 \neq h_0^* \in \mathscr{E}^*(t_0) \cap \mathscr{H}$; de (6.9) on déduit alors $(h_0^*|Ae) = t_0(h^*|e)$ $(e \in \mathscr{E})$. Mais A est autoadjoint; par conséquent $Ah_0^* = t_0 h_0^*$, c. q. f. d.

Proposition 6.5. *Pour tout* $t \in R^1$ *on a*

$$\chi(t)\mathscr{E} \subset \mathscr{E}^*(t). \tag{6.10}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que pour tout $e, f \in \mathscr{E}$ on a

$$\langle Ae|f\rangle = (Ae|f) = \int_{R^1} t\,d(E(t)e|f) = \int_{R^1} t\,d\langle E(t)e|f\rangle = \int_{R^1} t\langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t),$$

$$\|Ae\|^2 = \int_{R^1} t^2 d(E(t)e|e) = \int_{R^1} t^2 d\langle E(t)e|e\rangle = \int_{R^1} t^2\langle \chi(t)e|e\rangle d\mu(t).$$

Il s'ensuit en vertu de la proposition 3.4 que $\chi(t)Ae = (\chi Ae)(t) = t\chi(t)e$ pour tout t sauf peut-être les points d'un ensemble $N(e)$ de μ-mesure nulle; par conséquent, pour $t \notin N(e)$ on a

$$\langle \chi(t)f|Ae\rangle = \overline{\langle \chi(t)Ae|f\rangle} = t\overline{\langle \chi(t)ef\rangle} = t\langle \chi(t)f|e\rangle$$

quel que soit $f \in \mathscr{E}$. Soit $N = \bigcup_{e \in \mathscr{E}_{00}} N(e)$. Alors $\mu(N) = 0$ et pour tout $e \in \mathscr{E}$ $(e = \Sigma\lambda_i e_i, \{e_i\} \subset \mathscr{E}_{00})$ et $t \notin N$ on a

$$\langle \chi(t)f|Ae\rangle = \sum_i \bar{\lambda}_i \langle \chi(t)f|Ae_i\rangle = t\sum_i \bar{\lambda}_i \langle \chi(t)f|e_i\rangle = t\langle \chi(t)f|e\rangle,$$

quel que soit $f \in \mathscr{E}$. Comme il est permis de modifier les valeurs de $\chi(t)$ sur un ensemble de μ-mesure nulle, posons $\chi(t) = 0$ sur N. Ce changement conserve à $\chi(t)$ toutes les propriétés que nous avons déjà établies. En outre, nous aurons $\langle \chi(t)f|Ae\rangle = t\langle \chi(t)f|e\rangle$ pour tout $t \in R^1$ et $e, f \in \mathscr{E}$; il résulte que $\chi(t)f \in \mathscr{E}^*(t)$ pour tout $f \in \mathscr{E}$, c. q. f. d.

Remarquons que par (6.4) il s'ensuit de la proposition 6.5 le corollaire suivant:

Pour tout $t \in R^1$ *on a* $\mathscr{E}(t) \subset \mathscr{E}^*(t)$ *et* $(\chi h)(t) \in \mathscr{E}^*(t)$, *quel que soit* $h \in \mathscr{H}$.

Voici un autre corollaire de la proposition 6.5:

$\chi(t_0)\mathscr{E} \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$ *si et seulement si* t_0 *est une valeur propre (dans* $\mathscr{H}$*) de* A.

En effet, si $\chi(t_0)\mathscr{E} \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$, on a en vertu de la proposition 6.5 $\mathscr{E}^*(t_0) \cap \mathscr{H} \neq \{0\}$, donc (en vertu de la proposition 6.4) t_0 est une valeur propre (dans $\mathcal{H}$) de A. Inversement $E(\{t_0\})\neq 0$, par conséquent $\mu(\{t_0\})\neq 0$ aussi. En posant dans (6. 5) $\sigma=\{t_0\}$, nous obtenons $E(\{t_0\})=\chi(t_0)\mu(\{t_0\})$, d'où il résulte $\chi(t_0)\mathcal{E}\cap\mathcal{H}=E(\{t_0\})\mathcal{E}\cap\mathcal{H}\neq\{0\}$, c. q. f. d.

Envisageons maintenant le comportement des vecteurs propres approximatifs de A (c'est-à-dire des suites $\{e_n\}\subset\mathcal{H}$, telles que $\|Ae_n-te_n\|\to 0$ pour un $t\in R^1$ fixé). Soit $\mathcal{E}^0(t)$ l'ensemble des $e^*\in\mathcal{E}^*$, tels que $e^*=\lim e_n$ (dans $\mathcal{E}^*$), où $\{e_n\}\subset\mathcal{H}$ et $\|Ae_n-te_n\|\to 0$.

Proposition 6.6. *$\mathcal{E}^0(t)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^*$, tel que $\mathcal{E}(t)\subset\mathcal{E}^0(t)\subset\mathcal{E}^*(t)$, quel que soit $t\in R^1$.*[27]

Démonstration. Comme il est facile à voir que $\mathcal{E}^0(t)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{E}^*$, passons à la démonstration des inclusions $\mathcal{E}(t)\subset\mathcal{E}^0(t)\subset\mathcal{E}^*(t)$. La deuxième s'ensuit de ce que, pour tout $e\in\mathcal{E}$ on a

$$\begin{aligned}|\langle e^*|Ae\rangle-t\langle e^*|e\rangle| &\leqq \|e_n-e^*\|_1(\|Ae\|_1+|t|\,\|e\|_1)+|\langle e_n|Ae\rangle-t\langle e_n|e\rangle|=\\ &=\|e_n-e^*\|_1(\|Ae\|_1+|t|\,\|e\|_1)+|(e_n|Ae)-t(e_n|e)|\leqq\\ &\leqq\|e_n-e^*\|_1(\|Ae\|_1+|t|\,\|e\|_1)+\|Ae_n-te_n\|\,\|e\|\to 0;\end{aligned}$$

par conséquent e^* vérifie (6. 9) donc $e^*\in\mathcal{E}^*(t)$. Il nous reste à démontrer la première inclusion $\mathcal{E}(t)\subset\mathcal{E}^0(t)$. Pour cela, remarquons d'abord que si $\{\Delta^{(n)}\}$ est la suite des partitions construites après la proposition 6. 3, l'ensemble des points $t_0\in R^1$, tels que $\mu(\sigma_{k_0}^{(n_p)})(|\sigma_{k_0}^{(n_p)}|)^{-1}\to 0$ où $t_0\in\sigma_{k_0}^{(n_p)}$, est de μ-mesure nulle. En effet, soit N cet ensemble et soit $N_{\varepsilon,p}=\bigcup\sigma_k^{(n_p)}$, où $\mu(\sigma_k^{(n_p)})<$ $<\varepsilon|\sigma_k^{(n_p)}|$. Si $t\in N$, il existe un p_t tel que $p>p_t$ entraîne $t\in N_{\varepsilon,p}$, donc $N\subset\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q}$. Mais $\mu(N_{\varepsilon,q})<\varepsilon\Sigma|\sigma_k^{(n_p)}|\leqq\varepsilon|\sigma_\mu|$, donc aussi $\mu(\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q})<\varepsilon|\sigma_\mu|$. Comme $\{\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q}\}$ est une suite croissante d'ensembles, il résulte $\mu(\bigcup_{p=1}^{\infty}\bigcap_{q=p}^{\infty}N_{\varepsilon,q})\leqq$ $\leqq\varepsilon|\sigma_\mu|$. Par conséquent $\mu(N)\leqq\varepsilon|\sigma_\mu|$, quel que soit $\varepsilon>0$ donc $\mu(N)=0$. Il nous est permis de poser $\chi(t)=0$ sur N sans rien changer dans toutes nos considérations antérieures. Dans le corollaire de la proposition 6. 3 (en passant par exemple à une nouvelle suite partielle) nous pouvons donc supposer aussi que

$$\inf_n\frac{\mu([t_n',t_n''])}{t_n''-t_n'}\geqq\varepsilon(t)>0\qquad[t\text{ tel que }\chi(t)\neq 0].$$

Posons $e_n=[\mu([t_n',t_n''])]^{-1}E([t_n',t_n''])f$. En vertu du même corollaire on a alors

[27]) Il sera intéressant d'élucider les cas où $\mathcal{E}(t)=\mathcal{E}^0(t)$, ou $\mathcal{E}^0(t)=\mathcal{E}^*(t)$.

$e_n \to \chi(t)f$ dans $\mathcal{E}^*$. Il nous reste à démontrer $\|Ae_n - te_n\| \to 0$. Or

$$\|Ae_n - te_n\|^2 = [\mu([t_n', t_n''])]^{-2} \| \int_{[t_n', t_n'']} (\tau - t) dE(\tau) f\|^2 =$$

$$= [\mu([t_n', t_n''])]^{-2} \int_{[t_n', t_n'']} |\tau - t|^2 d(E(\tau)f|f) \leqq \frac{(t'' - t')^2}{[\mu([t_n', t_n''])]^2} (E([t_n', t_n''])f|f) \leqq$$

$$\leqq \frac{(t_n'' - t_n')^2}{[\mu([t_n', t_n''])]^2} \|E([t_n', t_n''])\|_1 \|f\|_1^2 = (t_n'' - t_n') \|f\|_1^2 \frac{t_n'' - t_n'}{\mu([t_n', t_n''])} \cdot$$

$$\cdot \left\| \frac{E([t_n', t_n''])}{\mu([t_n', t_n''])} \right\|_1 \leqq \frac{\|f\|_1^2}{\varepsilon(t)} (t_n'' - t_n') \left\| \frac{E([t_n', t_n''])}{\mu([t_n', t_n''])} \right\|_1 \to \frac{\|f\|_1^2}{\varepsilon(t)} \cdot 0 \cdot \|\chi(t)\|_1 = 0,$$

donc $\chi(t)f \in \mathcal{E}^0(t)$. Il résulte que $\chi(t)\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^0(t)$, et comme $\mathcal{E}^0(t)$ est fermé, on a $\mathcal{E}(t) \subset \mathcal{E}^0(t)$, c. q. f. d.

Les espaces $\mathcal{E}^*(t)$ et $\mathcal{E}^0(t)$ sont déterminés univoquement par A. Les espaces $\mathcal{E}(t)$ sont définis par l'intermédiaire de la fonction $\chi(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$, dont la dépendance de A nous n'avons pas mise en évidence. Pour déterminer la dépendance de A de la fonction $\chi(t)$, remarquons que si dans (6.3) nous posons $\sigma = R^1$, nous obtenons la décomposition intégrale

$$\langle e|f\rangle = \int_{R^1} \langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E}) \tag{6.11}$$

de $\mathcal{E}$, les opérateurs $\chi(t)$ vérifiant

$$\langle \chi(t)e|e\rangle \geqq 0 \qquad (e \in \mathcal{E}) \tag{6.12}$$

et (6.10). Inversement, ces propriétés déterminent $\chi(t)$:

P r o p o s i t i o n 6.7. *Soit* $\chi_1(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{E}; \mathcal{E}^*)$ *une fonction définie sur* R^2, *vérifiant* (6.10), (6.11) *et* (6.12). *Alors* $\chi_1(t) = \chi(t)$ μ-pp.

D é m o n s t r a t i o n. En vertu de la proposition 3.3 il existe une famille semi-spectrale $E_1(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) telle que

$$(E_1(\sigma)e|f) = \langle E_1(\sigma)e|f\rangle = \int_\sigma \langle \chi_1(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E}). \tag{6.13}$$

Soit σ_μ un intervalle contenant $S(\mu) \cup [-\|A\|, \|A\|]$. Alors $E_1(\sigma_\mu) = I$ et [en vertu de (6,9), (6.10) et (6.13)]

$$(A^n e|f) = (E_1(\sigma_\mu)e|A^n f) = \int_{\sigma_\mu} \langle \chi_1(t)e|A^n f\rangle d\mu(t) =$$

$$= \int_{\sigma_\mu} t^n \langle \chi_1(t)e|f\rangle d\mu(t) \qquad (e, f \in \mathcal{E};\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

donc

$$(A^n e|f) = \int_{\sigma_\mu} t^n d(E_1(t)e|f) \qquad (e, f \in \mathcal{E};\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte que $E_1(\sigma)$ est égale à la famille spectrale $E(\sigma)$ de A. Mais alors de (6.3) et (6.13) il s'ensuit (en vertu de la proposition 3.1) que $\chi_1(t) = \chi(t)$ μ-pp, c. q. f. d.

Nous pouvons maintenant étudier l'équivalence unitaire des opérateurs autoadjoints bornés. Dans le cas des opérateurs à spectre discret, le problème est bien élémentaire et revient à l'égalité des rangs des projections propres. Nos considérations nous permettent de conserver cette caractérisation par l'intermédiaire des opérateurs $\chi(t)$. Les invariants unitaires ne sont pas essentiellement différents de ceux déjà connus (*voir* [12] ou [19]) mais leur interprétation [le rang des „opérateurs propres généralisés" $\chi(t)$] nous semble être nouvelle.

Soient A et B deux opérateurs autoadjoints bornés, $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ leurs familles spectrales, et soit $\mu(\sigma)$ une mesure borélienne telle que $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ soient absolument continues par rapport à $\mu(\sigma)$. Soit $\mathcal{E}$ un espace admis par rapport à A et B, et soient $\chi_A(t)$ et $\chi_B(t)$ les opérateurs propres généralisés [c'est-à-dire vérifiant (6.10), (6.11) et (6.12)] de A et B.

Proposition 6.8. *Les opérateurs A et B sont unitairement équivalents si et seulement si $\chi_A(t)$ et $\chi_B(t)$ ont le même rang* μ-pp.

Démonstration. A et B sont unitairement équivalents si et seulement si $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) sont unitairement équivalents. En vertu de la proposition 6.7 et de la proposition 5.1, $E_A(\sigma)$ et $E_B(\sigma)$ (σ borélien $\subset R^1$) sont unitairement équivalents si et seulement si $\chi_A(t)$ et $\chi_B(t)$ ont le même rang μ-pp, c. q. f. d.

Montrons finalement, comment le théorème suivant de J. VON NEUMANN[28]) sur les fonctions[29]) d'un opérateur autoadjoint découle de nos résultats:

Soient A et B deux opérateurs autoadjoints bornés tels que B commute avec tout $\Phi \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ commutant avec A; alors B est une fonction de A.

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ un espace admis par rapport à A et B. Soit $\Phi_m(t)e = \overline{\langle e_m^*(t)|e\rangle} e_1^*(t)$ $(e \in \mathcal{E})$, où $\chi(t)e = \sum \overline{\langle e_m^*(t)|e\rangle} e_m^*(t)$ est la décomposition de $\chi(t)$ donnée par la proposition 4.2. Evidemment $|\langle \Phi_m(t)e|f\rangle|^2 \leqq \langle \chi(t)e|e\rangle \langle \chi(t)f|f\rangle$ et $\langle \Phi(t)e|f\rangle$ est une fonction borélienne quel que soit $f \in \mathcal{E}$. Par conséquent, en vertu de la proposition 2.5, il existe un $\Phi_m e \in \mathcal{H}$,

28) J. VON NEUMANN [18], F. RIESZ [21].

29) Dans le sens usuel; *voir* par exemple [22], Ch. VII, § 1 et § 2.

tel que $(\chi \Phi_m e)(t) = \Phi_m(t)e$ μ-pp et [en vertu de (2.28)]

$$\|\Phi_m e\|^2 \leqq \int_{R^1} \langle \chi(t)e|e\rangle d\mu(t) = \|e\|^2$$

L'application $e \to \Phi_m e$ est linéaire et continue (dans $\mathcal{H}$). Elle se prolonge par continuité en un seul opérateur $\Phi_m \in \mathcal{L}(\mathcal{H};\mathcal{H})$. Comme on a [en vertu du fait que $e_m^*(t) \in \mathcal{E}(t)$, $m=1,2,\ldots$]

$$\begin{aligned}(\Phi_m Ae|f) &= \int_{R^1} \langle (\chi \Phi_m Ae)(t)|f\rangle d\mu(t) = \int_{R^1} \langle \Phi_m(t)Ae|f\rangle d\mu(t) = \\ &= \int_{R^1} t\langle \Phi_m(t)e|f\rangle d\mu(t) = \int_{R^1} \langle \Phi_m(t)e|Af\rangle d\mu(t) = \\ &= (\Phi_m e|Af) = (A\Phi_m e|f) \qquad (e,f \in \mathcal{E}),\end{aligned}$$

il résulte $\Phi_m A = A\Phi_m$; par conséquent $\Phi_m B = B\Phi_m$. En utilisant la proposition 6.2, nous obtenons pour $e \in \mathcal{E}$ fixé

$$\langle \Phi_m(t)Be|f\rangle = \langle (\chi \Phi_m Be)(t)|f\rangle = \lim \frac{\langle E(\sigma_k^{(n_p)})\Phi_m Be|f\rangle}{\mu(\sigma_k^{(n_p)})} =$$

$$= \lim \frac{\langle E(\sigma_k^{(n_p)})\Phi_m e|Bf\rangle}{\mu(\sigma_k^{(n_p)})} = \langle (\chi \Phi_m e)(t)|Bf\rangle = \langle \Phi(t)e|Bf\rangle \quad (\text{où } t \in \sigma_k^{(n_p)})$$

pour tout $f \in \mathcal{E}$ et $t \in R^1$ en dehors d'un ensemble $N_m(e)$ de μ-mesure nulle. Soit $N_m = \bigcup_{e \in \mathcal{E}_{00}} N_m(e)$. Alors $\mu(N_m) = 0$ et

$$\langle \Phi_m(t)Be|f\rangle = \langle \Phi_m(t)e|Bf\rangle \tag{6.14}$$

quel que soit $e, f \in \mathcal{E}$ et $t \notin N_m$. Soit $N = \bigcup_m N_m$. Alors N est à son tour de μ-mesure nulle et de (6.14) nous obtenons que pour tout $t \notin N$ et $m=1,2,\ldots$

$$\overline{\langle e_m^*(t)|Be\rangle}\langle e_1^*(t)|f\rangle = \overline{\langle e_m^*(t)|e\rangle}\langle e_1^*(t)|Bf\rangle \tag{6.15}$$

quel que soit $e, f \in \mathcal{E}$. Soit $e_1^*(t) \neq 0$ [c'est-à-dire $t \notin \Omega_0$, ou $\chi(t) \neq 0$] et soient $e_1, f_1 \in \mathcal{E}$, tels que $\langle e_1^*(t)|e_1\rangle \neq 0 \neq \langle e_1^*(t)|f_1\rangle$. Alors de (6.15) on déduit (en posant d'abord $e=e_1, f=f_1$, puis $e=f_1, f=f_1$)

$$\frac{\overline{\langle e_1^*(t)|Be_1\rangle}}{\overline{\langle e_1^*(t)|e_1\rangle}} = \frac{\langle e_1^*(t)|Bf_1\rangle}{\langle e_1^*(t)|f_1\rangle} = \frac{\overline{\langle e_1^*(t)|Bf_1\rangle}}{\overline{\langle e_1^*(t)|f_1\rangle}}$$

Par conséquent, pour $t \notin N$ la valeur du rapport $\langle e_1^*(t)|Be\rangle / \langle e_1^*(t)|e\rangle$ ne dépend pas de e, sous l'hypothèse qu'elle soit déterminée. Soit $b_0(t)$ cette valeur et soit $b(t)$ la fonction prolongeant $b_0(t)$ sur tout R^1, identiquement nulle sur $\Omega_0 \cup N$. Alors $b(t)$ est une fonction réelle univoquement déterminée. En outre $b(t)$ est une fonction borélienne. En effet comme $\Omega_0 \cup N$ est un ensemble borélien (car il est μ-mesurable), il nous reste à démontrer que $b_0(t)$ est borélienne sur $R^1 - \Omega_0 \cup N$. Pour cela, soit $\{e_n\}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathfrak{E}$ et soit $A_n = \{t: \langle e_1^*(t)|e_n\rangle \neq 0\}$. Alors $\bigcup_n A_n = R^1 - \Omega_0$ et $b_0(t) = \langle e_1^*(t)|Be_n\rangle / \langle e_1^*(t)|e_n\rangle$ est sur tout $A_n \cap (T-N)$ évidement borélienne. Il en résulte aisément que $b_0(t)$ est borélienne sur $T - \Omega_0 \cup N = (\bigcup_n A_n) \cap (T-N)$, donc que $b(t)$ est borélienne. D'autre part de (6. 15) nous obtenons

$$\overline{\langle e_m^*(t)\,|\,Be\rangle} = b(t)\overline{\langle e_m^*(t)\,|\,e\rangle}$$

pour tout $t \notin N$, $e \in \mathfrak{E}$ et $m = 1, 2, \ldots$. En utilisant encore une fois la proposition 4. 2, on déduit que $\chi(t)Be = b(t)\chi(t)e$ quel que soit $e \in \mathfrak{E}$ et $t \notin N$. Par conséquent

$$(Be|f) = \int_{R^1} \langle \chi(t)Be|f\rangle d\mu(t) = \int_{R^1} b(t)\langle \chi(t)e|f\rangle d\mu(t) =$$

$$= \int_{R^1} b(t)d(E(t)e|f) \qquad (e, f \in \mathfrak{E})$$

ce qui montre justement que $B = b(A)$, c. q. f. d.

Ouvrages cités

[1] W. G. Bade—J. T. Schwartz, On Mautner's eigenfunction expansion, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 519—525.

[2] Y. M. Berezansky, Sur la décomposition en fonctions propres généralisées des opérateurs différentiels autoadjoints, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **108** (1956), 379—383 (en russe).

[3] F. E. Browder, Eigenfunction expansions for formally selfadjoint partial differential operators. I, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **42** (1956), 769—772.

[4] F. E. Browder, Eigenfunction expansions for non-symmetric partial differential operators. I, *American Journal of Math.*, **80** (1958), 365—381.

[5] N. Dinculeanu, Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **245** (1957), 1203—1205.

[6] N. Dinculeanu, Mesures vectorielles et opérations linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 2328—2331.

[7] N. Dinculeanu, Sur la représentation intégrale de certaines opérations linéaires. III, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 59—68.

[8] C. Foiaş, Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs formellement symétriques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **246** (1958), 3147—3148.

[9] C. Foiaş, Sur la décomposition intégrale des familles semi-spectrales en opérateurs qui sortent de l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 904—906.

[10] C. Foiaş, Sur la décomposition spectrale en opérateurs propres des opérateurs linéaires dans les espaces nucléaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248** (1959), 1105—1108.

[11] K. Friedrichs, Die unitären Invarianten selbstadjungierter Operatoren im Hilbertschen Raum, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung*, **45** (1935), 79—82.

[12] L. Gårding, Eigenfunction expansions connected with elliptic differential operators, *C. R. du douzième Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Lund* (1953), 44—55.

[13] I. M. Gelfand—A. G. Kostutchenko, Sur la décomposition en fonctions propres des opérateurs différentiels et d'autres opérateurs, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **103** (1955), 345—352 (en russe).

[14] I. M. Gelfand—G. E. Šilov, Quelques applications de la théorie des fonctions généralisées, *Journal math. pures et appl.*, **35** (1956), 383—414.

[15] L. Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, **94** (1955), 161—248.

[16] G. I. Katz, Sur la décomposition en fonctions propres des opérateurs autoadjoints, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **119** (1958), 19—23 (en russe).

[17] F. I. Mautner, On eigenfunction expansions, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **39** (1953), 49—53.

[18] J. von Neumann, Über Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.*, **32** (1931), 191—226.

[19] J. von Neumann, On rings of operators. Reduction Theory, *Annals of Math.*, **50** (1949), 401—485.

[20] M. A. Neumark, On a representation of additive operator set functions, *Doklady Akad. Nauk SSSR*, **41** (1943), 359—361.

[21] F. Riesz, Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math.*, **7** (1935), 147—129.

[22] B. Sz.-Nagy, *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes* (Berlin, 1942).

[23] B. Sz.-Nagy, *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice au livre „*Leçons d'analyse fonctionnelle*" par F. Riesz et B. Sz.-Nagy.

(Reçu le 20 octobre 1958, sous forme revue le 15 mai 1959)